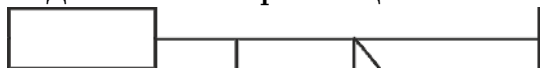
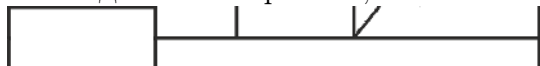


Условие

Задача 10- 3. Просто цепь



В электрической цепи, изображенной на рис. 1, характеристики элементов следующие: $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 15 \text{ Ом}$; $\varepsilon = 2,0 \text{ В}$, $r = 5,0 \text{ Ом}$. Вольтамперная характеристика нелинейного элемента НЛ представлена на отдельном бланке - можете выполнять на нем все необходимые построения, после чего вложите бланк в тетрадь с решениями.

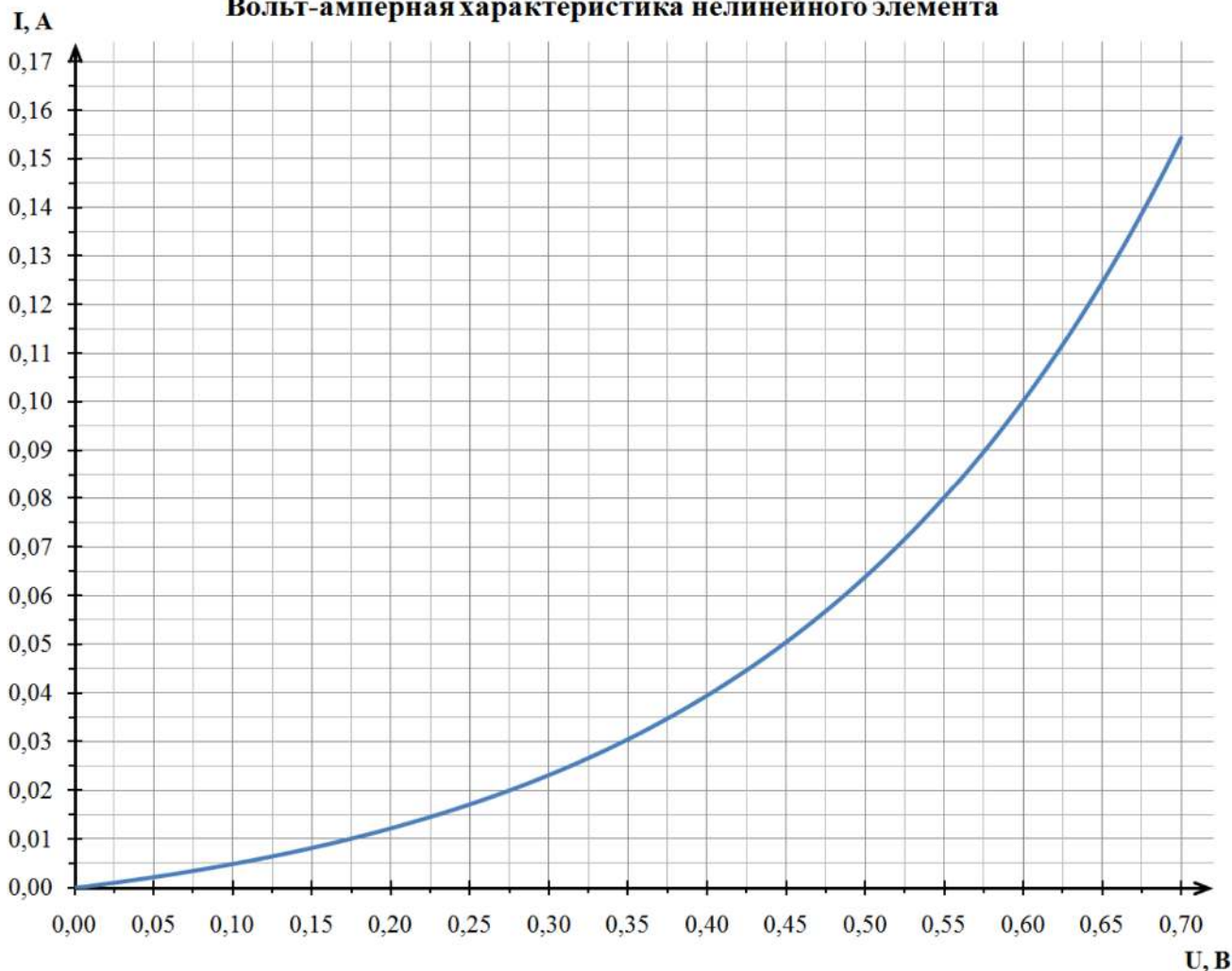


Электрические свойства диодов упрощенно можно описать следующим образом: при напряжениях меньших $U^* = +0,70 \text{ В}$ сила тока через них пренебрежимо мала, при больших напряжениях сопротивлением диодов можно пренебречь.

Рисунок 1 – Схема электрической цепи

Задание: Найдите напряжения и силы токов на резисторах R_3 и R_1 .

Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента

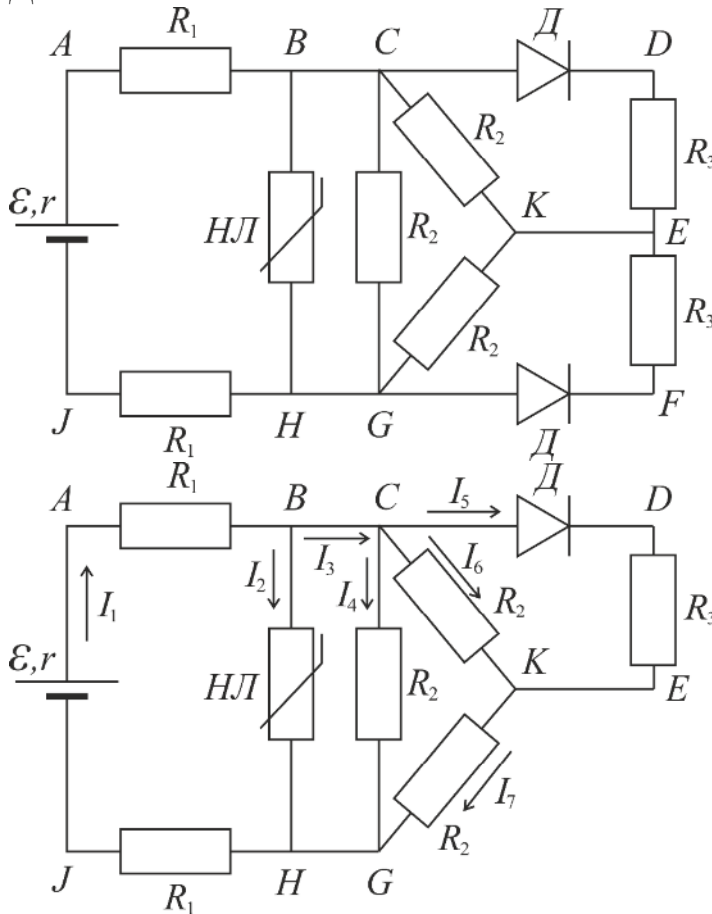


Решение

Задача 10- 3. Просто цепь

Первоначально цепь может показаться симметричной относительно горизонтальной линии, проходящей через центр рисунка, что позволило бы отбросить участок цепи KE (рисунок 1),

поскольку ток через него не идет. Однако такое предположение неверно, поскольку элементы с несимметричной вольт-амперной характеристикой – диоды – включены навстречу друг другу. Если напряжение приложено к диоду в обратном направлении, то, согласно вольт-амперной характеристике, ток через него не идет. Так, ток не пойдет через нижний диод Д.



Действительно, если предположить, что через оба диода ток в соответствующем направлении все же идет, то получим, что потенциал в точках C и G больше потенциала в точке E. Но тогда токи в узел K со всех сторон будут входить и никуда не выходить, чего быть не может. Таким образом, ток через нижний диод Д на самом деле не будет проходить и, соответственно, ток через нижний резистор R_3 равен нулю. Поскольку ток и напряжение резисторе связаны линейным соотношением, то напряжение на нижнем резисторе R_3 также равно нулю. В силу отсутствия тока для дальнейшего изучения цепи участок GFE можно отбросить (рис. 2).

Так как вольт-амперная характеристика для нелинейного элемента задана графически, то для нахождения тока I_2 , проходящего через него, будем использовать графический метод. Для этого необходимо найти связь между напряжением на нелинейном элементе U_{BH} и током через него I_2 , определяемую всеми остальными элементами цепи.

Начнем рассмотрение с узла C. В нем разветвляется ток I_3 , что позволяет записать следующее соотношение для токов: $I_3 = I_4 + I_5 + I_6$. Все токи можно выразить через соответствующие напряжения с помощью закона Ома для участка цепи с резисторами:

$$I_4 = \frac{U_{CG}}{R_2}; \quad I_5 = \frac{U_{DE}}{R_3}; \quad I_6 = \frac{U_{CK}}{R_2}$$

Изучая вольт-амперную характеристику диода при его прямом включении можно заметить,

что в случае напряжения на элементе, меньшего $U_d = 0,70$ В, ток не пойдет. В противном случае через диод может проходить любой ток, при этом на элементе падение напряжения будет равно U_d . Будем считать, что через диод ток протекает. В случае неверного предположения мы получим явно некорректный результат в виде, например, обратного направления тока через оставшийся резистор R_3 .

Получаем, что напряжение U_{DE} можно выразить: $U_{DE} = U_{CK} - U_d$. Поскольку в итоге мы хотим получить связь напряжения и тока в нелинейном элементе, то будем пытаться выразить все имеющиеся напряжения через $U_{CG} = U_{BH}$. Для участка KG с резистором R_2 можно записать $U_{KG} = I_7 R_2$, что приводит к:

$$\left(\frac{U_{DE}}{R_2} + \frac{U_{CK}}{R_2} \right) R_2 = \left(\frac{U_{CK} - U_d}{R_2} + \frac{U_{CK}}{R_2} \right) R_2$$

$$U_{CG} - U_{CK} = (I_5 + I_6) R_2 = \left(\frac{U_{DE}}{R_3} + \frac{U_{CK}}{R_2} \right) R_2 = \left(\frac{U_{CK} - U_d}{R_3} + \frac{U_{CK}}{R_2} \right) R_2$$

Отсюда можно выразить:

$$K = \frac{U_{CG} + U_d \frac{R_2}{R_3}}{2 + \frac{R_2}{R_3}} = \frac{U_{CG} R_3 + U_d R_2}{2 R_3 + R_2}$$

$$U_{CK} = \frac{U_{CG} + U_d \frac{R_2}{R_3}}{2 + \frac{R_2}{R_3}} = \frac{U_{CG} R_3 + U_d R_2}{2 R_3 + R_2}$$

$$- 2 U_d) \frac{R_3}{2 R_3 + R_2}$$

$$U_{DE} = U_{CK} - U_d = (U_{CG} - 2 U_d) \frac{R_3}{2 R_3 + R_2} \quad (1)$$

Тогда, возвращаясь назад к току I_3 , получим:

$$I_3 = \frac{U_{CG} + U_d \frac{R_2}{R_3}}{R_2 (R_2 + 2 R_3)} - \frac{U_d}{R_2 + 2 R_3}$$

$$I_3 = I_4 + I_5 + I_6 = \frac{U_{CG}}{R_2} + \frac{U_{DE}}{R_3} + \frac{U_{CK}}{R_2} = U_{CG} \frac{2 R_2 + 3 R_3}{R_2 (R_2 + 2 R_3)} - \frac{U_d}{R_2 + 2 R_3}$$

$$= \frac{U_{CG}}{R_2} + \frac{U_{DE}}{R_3} + \frac{U_{CK}}{R_2} =$$

Ток через источник разветвляется в узле B следующим образом: $I_1 = I_2 + I_3$. С другой стороны, этот ток можно определить из закона Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

Полное сопротивление всей цепи R можно записать как сумму сопротивлений двух резисторов R_1 , включенных последовательно с источником, и сопротивления оставшейся цепи, которое выразим через закон Ома:

$$R = 2 R_1 + \frac{U_{BH}}{I_1}$$

Тогда из последних двух выражений можно получить выражение для тока:

$$= \frac{\varepsilon - U_{BH}}{r + 2 R_1}$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon - U_{BH}}{r + 2R_1} \quad (2)$$

Наконец, получаем выражение для тока через нелинейный элемент, учитывая равенство напряжений $U_{BH} = U_{CG}$:

$$I_2 = I_1 - I_3 = \frac{\varepsilon - U_{BH}}{r + 2R_1} - U_{BH} \frac{2R_2 + 3R_3}{R_2(R_2 + 2R_3)} + \frac{U_d}{R_2 + 2R_3} \quad (3)$$

$$= \frac{\varepsilon - U_{BH}}{r + 2R_1} - U_{BH} \frac{2R_2 + 3R_3}{R_2(R_2 + 2R_3)} + \frac{U_d}{R_2 + 2R_3}$$

Полученное выражение представляет собой зависимость силы тока I_2 , протекающей через нелинейный элемент НЛ, от напряжения на нем U_{BH} . Подставив численные значения характеристик, получим:

$$I_2 = 0,094 \text{ А} - 0,125 \text{ См} \cdot U_{BH}$$

Данная зависимость определяет прямую, которую можно провести на вольтамперной характеристике нелинейного элемента (рисунок 3).

Координаты точки пересечения графиков как раз определяют ток и напряжение на нелинейном элементе. Получаем: $I_2 \approx 0,042 \text{ А}$, $U_{BH} \approx 0,41 \text{ В}$. Тогда по формуле (1), полученной ранее, найдем напряжение на оставшемся резисторе R_3 :

$$U_{дв} = (U_{BH} - 2U_d) \frac{R_3}{2R_3 + R_2} = -0,297 \text{ В}$$

Точка пересечения графиков как раз определяет ток и напряжение на нелинейном элементе. Получаем: $I_2 \approx 0,042 \text{ А}$, $U_{BH} \approx 0,41 \text{ В}$. Тогда по формуле (1), полученной ранее, найдем напряжение на оставшемся резисторе R_3 :

$$(U_{BH} - 2U_d) \frac{R_3}{2R_3 + R_2} = -0,297 \text{ В}$$

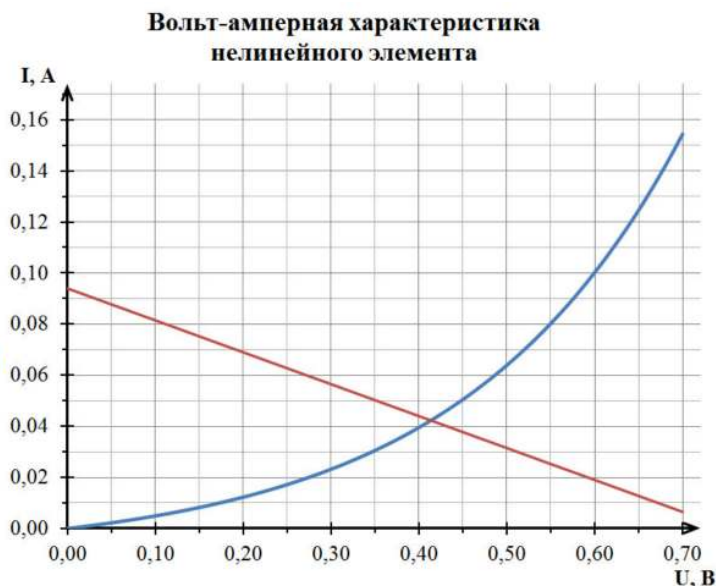


Рисунок 5 - Вольтамперная характеристика нелинейного элемента с пересечением прямой, характеризующей цепь

Полученный отрицательный результат говорит о том, что ток идет через резистор R_3 в направлении, обратном предполагаемому, чего быть не может. Получаем, что допущение о том, что через верхний диод Д ток идет, неверно. То есть напряжение на участке СК меньше, чем

U_d (в этом можно убедиться, проведя расчеты по имеющимся формулам), что недостаточно для «открытия» диода. Таким образом, можно сделать вывод, что ток через оставшийся резистор R_3 не пойдет и, соответственно, напряжение на нем будет равно нулю.

Ответ

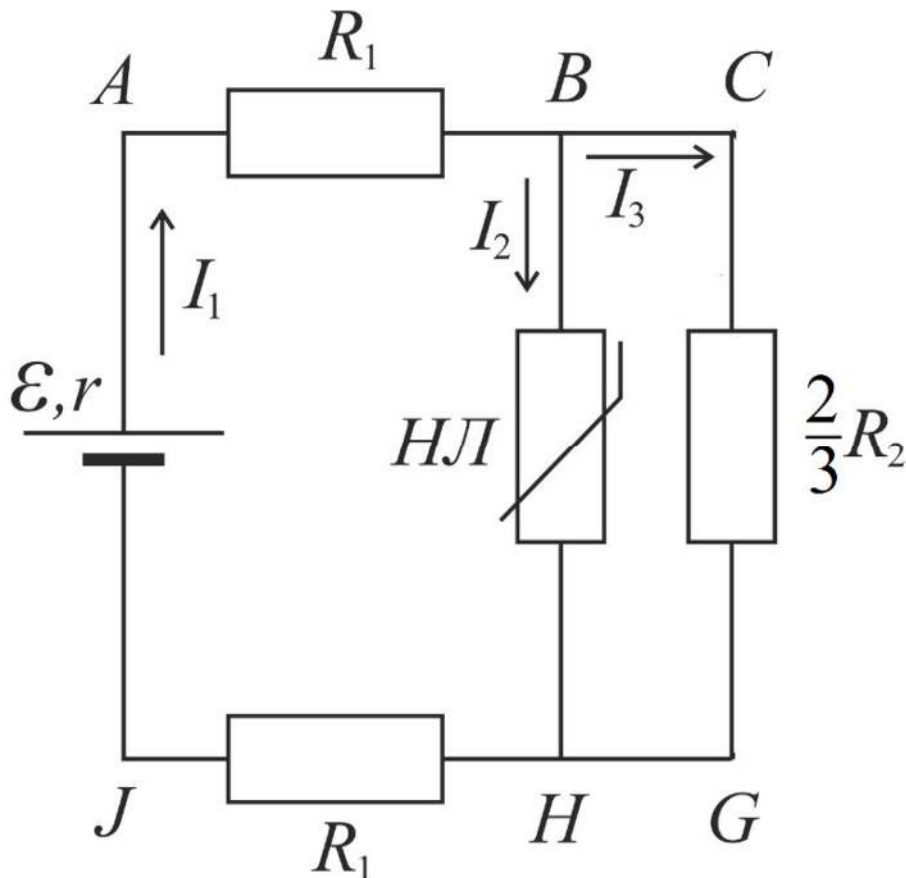
токи и напряжения на обоих резисторах R_3 равны нулю.

Примечания:

Задачу можно было решить и альтернативным способом, с самого начала предположив, что токи через оба диода не пойдут. Тогда, проведя необходимые вычисления данной электрической цепи, необходимо было бы показать, что напряжение на участке СК меньше, чем U_d .

Наконец имеется еще один, самый короткий, способ решения. Руководствуясь значениями ЭДС источника, его внутреннего сопротивления и сопротивлений R_1 , можно рассчитать, что максимально возможная сила тока в цепи составляет 0,080 А. Тогда, согласно вольтамперной характеристике нелинейного элемента, максимальное напряжение на нем — 0,55 В. Отсюда следует, что напряжение на диодах не сможет превысить достаточного $U_d = 0,70$ В, чтобы ток через них проходил. Отсюда сразу следует ответ данной задачи.

После того, как участки цепи с диодами оказались выключенными, осталось рассчитать силу тока через резисторы R_1 . Три резистора R_2 можно заменить на резистор с сопротивлением $\frac{3}{2}R_2$. Тогда рассматриваемая схема приобретет вид, показанный на рис. 4. Для расчета этой цепи можно воспользоваться уже использованным графическим методом, основанном на уравнениях (2)-(3). Та как участок цепи с диодами отключен, то в уравнении (3) следует



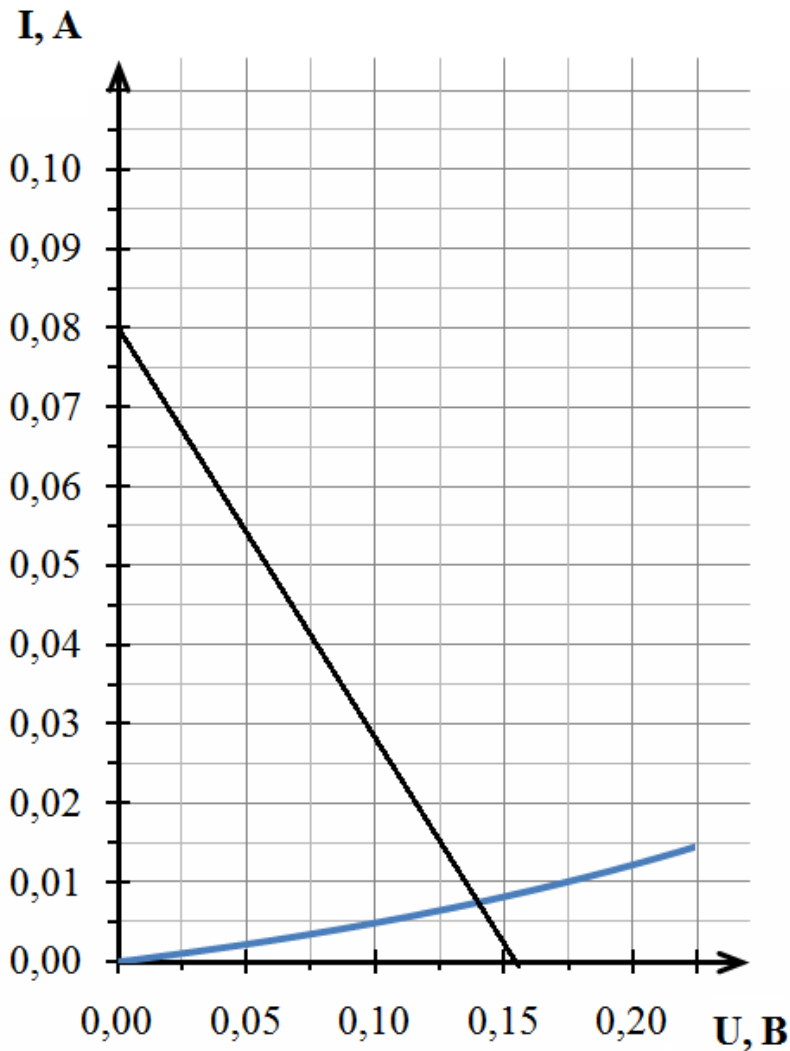
положить $R_3 \rightarrow \infty$, в результате чего получим

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - U}{r + 2R_1} - \frac{3U}{2R_2}$$

Здесь обозначено $U = U_{\text{вн}}$ - напряжение на нелинейном элементе. Подставляя численные значения, получим

$$I_2 = 0,080 - 0,155U$$

Построив график этой прямой на графике ВАХ нелинейного элемента, по координатам точки пересечения найдем силу тока $I_2 \approx 7 \text{ мА}$ и напряжение $U = U_{\text{вн}} \approx 0,14 \text{ В}$. Это же напряжение приложено и к параллельно подключенному резистору, поэтому силу тока через него



$$I_3 = \frac{3U}{2R_2} \approx 10 \text{ мА}.$$

Искомая сила тока через резисторы R_2 равна сумме

$$I_1 = I_2 + I_3 \approx 17 \text{ мА}.$$