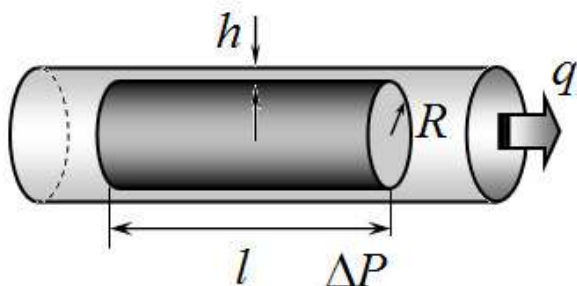


Условие

Задача 11-1. Гидроатмосферный подъемник

1. Введение.

При движении жидкости существенную роль играют силы вязкого трения – силы, возникающие между слоями жидкости, движущимися с разными скоростями, а также силы, действующие между движущейся жидкостью и стенками сосуда.



Пусть жидкость движется по горизонтальной трубе, внутри которой находится неподвижный цилиндрический цилиндр, коаксиальный с трубой (играющий роль препятствия). Радиус цилиндра равен R , длина l , толщина зазора между боковой поверхностью цилиндра и стенками трубы равна h (она значительно меньше радиуса цилиндра $h \ll R$)

Если разность давлений жидкости на торцах цилиндра равна ΔP , то расход жидкости q (объем, протекающий в единицу времени) протекающий через зазор определяется формулой:

$$q = \frac{\pi R h^3}{6 \eta l} \Delta P, \quad (1)$$

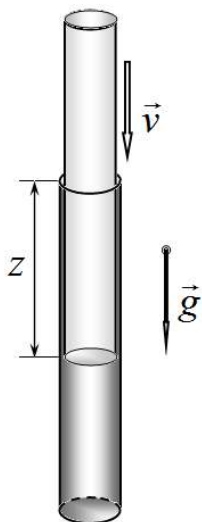
где η - характеристика протекающей жидкости, которая называется вязкостью (в данной задаче рассматривается вода, ее вязкость η и плотность ρ считайте известными).

Пусть расход воды в описанной трубе с цилиндром постоянен и равен q .

1.1	Найдите суммарную силу вязкого трения, действующую на воду в зазоре между цилиндром и трубой $F_{\text{вязк}}$.
1.2	Найдите силу вязкого трения, действующую на боковую поверхность цилиндра $F_{\text{бок}}$.
1.3	Найдите отношение силы вязкого трения, действующей на боковую поверхность цилиндра, к разности сил давления F_0 , действующих на торцы цилиндра $\frac{F_{\text{бок}}}{F_0}$.

Часть 2. Описание эффекта (пробирка в пробирке).

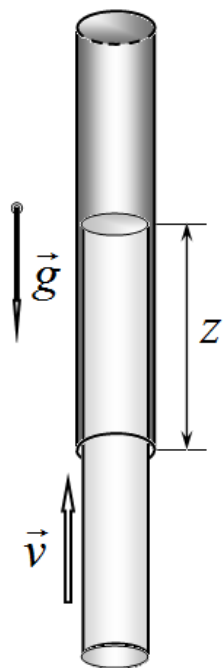
Принцип работы рассматриваемого гидроподъемника может быть изучен на простом устройстве, состоящем из двух длинных пробирок. Каждую из них можно считать цилиндрической трубкой, закрытой с одного конца. Диаметры пробирок различаются мало, поэтому меньшая из них входит в большую и может скользить в ней. Обозначим радиус меньшей пробирки R , ее массу m . Толщина зазора между стенками пробирок (когда меньшая находится в большей) мала по сравнению с радиусами пробирок и равна h .



2.1 Большую пробирку располагают вертикально и полностью заполняют водой. После этого в нее аккуратно опускаю меньшую пробирку, и она медленно начинает опускаться.

2.1.1	Найдите, на какую максимальную глубину $z_{\max}$ опустится меньшая пробирка.
2.1.2	Постройте схематический график зависимости скорости пробирки $v(z)$ от глубины погружения z .
2.1.3	Оцените время погружения пробирки от начального положения $z = 0$ до глубины $0,5z_{\max}$.

Математическая подсказка. При движении тела в вязкой среде, на него действуют силы вязкого трения, зависящие от скорости движения тела. Наличие этих сил приводит к тому, что скорость тела изменяется достаточно медленно, поэтому в уравнении второго закона Ньютона $ma = F(x, v)$, можно пренебречь слагаемым ma . Такое приближение называется квазистационарным. Кстати, оно же используется при описании электрического тока на основании закона Ома.*

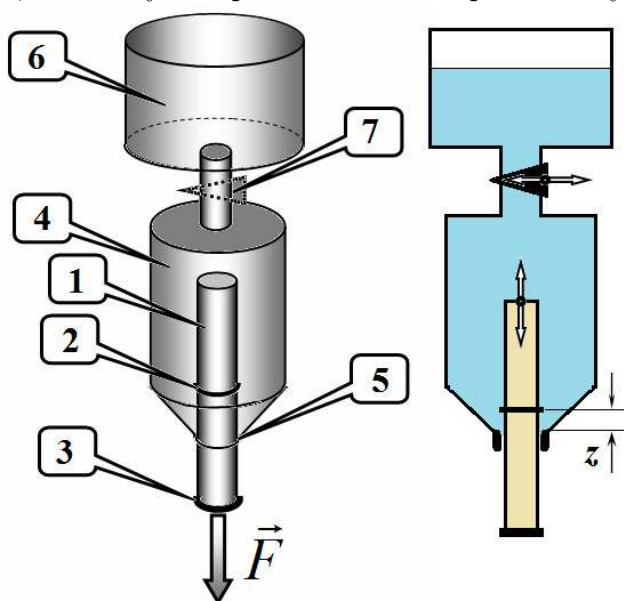


2.2 Если большую пробирку заполнить водой, погрузить в нее меньшую пробирку и резко перевернуть систему вверх дном, то при некоторой высоте подъема меньшая пробирка начнет медленно подниматься вверх.

2.1.1	Найдите, при какой минимальной высоте подъема $z_{\min}$ меньшая пробирка начнет подниматься вверх.
2.1.2	Постройте схематический график зависимости скорости пробирки от высоты ее подъема $v(z)$.
2.1.3	Оцените время подъема пробирки от высоты $1,5z_{\min}$ до высоты $2z_{\min}$.

Часть 3. Подъемник.

На основании рассмотренного устройства сконструирован гидроатмосферный подъемник, схема которого показана на рисунке. Пробирка 1 с двумя упорами 2 (точно на середине пробирки) и 3 (в ее нижней части) вставлена вертикально в горлышко бутылки 4 полностью заполненной водой, диаметр горлышка 5 которой незначительно превышает внешний диаметр бутылки. Бутылка соединена трубкой с краном 7 с большим открытым сосудом-накопителем 6 также заполненным водой. Пробирка может двигаться вертикально внутри бутылки, при ее любом положении (в том числе и на упорах) вода может просачиваться в зазоре между горлышком бутылки и пробиркой. В качестве координаты, определяющей положение пробирки z , используется расстояние от горлышка бутылки до середины пробирки (упора 2).



Длина пробирки l , площадь ее поперечного сечения - S . Пробирка начинает подниматься внутри бутылки, если она погружена в нее на одну четверть своей длины. В бутылку 4 воздух не попадает, высота бутылки больше, чем $\frac{l}{2}$. Плотность воды ρ , ускорение свободного падения - g .

Принцип работы устройства следующий.

1	Пробирка находится в крайнем нижнем положении. Кран закрывают, пробирка начинает подниматься вверх. При этом она подключается к некоторому внешнему устройству, над которым совершается полезная работа.	
2	Когда пробирка достигнет крайнего верхнего положения, кран открывают, и вода из сосуда накопителя очень быстро поступает в бутылку. Внешнее устройство отключается, пробирка быстро опускается вниз.	
3.1	Определите массу пробирки.	
3.2	Нарисуйте график рассматриваемого циклического процесса, зависимость силы действующей на пробирку со стороны внешнего устройства F от координаты пробирки z . Считайте все процессы квазистационарными (т.е. считайте, что в любом положении пробирка находится в состоянии равновесия).	
3.3	Рассчитайте, какую максимальную полезную работу может совершить подъемник за один цикл.	
3.4	Найдите КПД устройства (определите КПД в этом случае сформулируйте самостоятельно).	

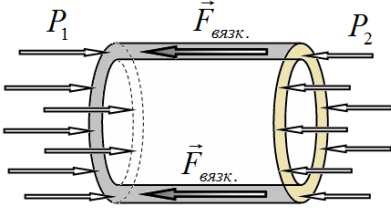
Решение

Задача 11-1. Гидроатмосферный подъемник

1. Введение.

1.1 Так расход жидкости постоянен, то любая порция жидкости движется без ускорения, следовательно, сумма сил действующих на любую выбранную часть жидкости, равна нулю. Применяя эти рассуждения к жидкости в зазоре, можем утверждать, что разность сил давления (действующих на торцы жидкости) уравнивается силами вязкого трения, действующими со стороны стенок:

$$\Delta P \cdot 2\pi R h = F_{\text{вязк.}} \quad (1)$$



Разность давлений следует выразить через расход с помощью формулы (1), приведенной в условии задачи:

$$q = \frac{\pi R h^3}{6\eta l} \Delta P \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \frac{6\eta l}{\pi R h^3} q, \quad (2)$$

Подставляя это выражение в формулу (1), получим формулу для суммарной силы вязкого трения, действующей на воду в зазоре:

$$F_{\text{вязк.}} = \Delta P \cdot 2\pi R h = \frac{6\eta l}{\pi R h^3} q \cdot 2\pi R h = \frac{12\eta l}{h^2} q \quad (3)$$

1.2 По третьему закону Ньютона сила, действующая со стороны стенок на воду равна по модулю силе, действующей со стороны воды на стенку. Так как площади боковой поверхности цилиндра и стенок трубы в зазоре практически равны (т.к. $h \ll R$), а сила вязкого трения пропорциональна площади соприкосновения, то сила вязкого трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, в два раза меньше силы, действующей на воду, поэтому

$$F_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \Delta P \cdot 2\pi R h = \pi R h \Delta P = \frac{6\eta l}{h^2} q. \quad (4)$$

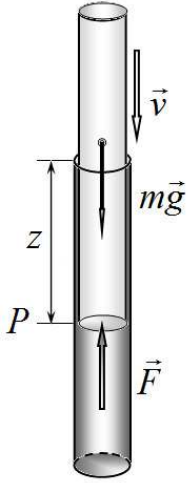
1.3 Понятно, что разность сил давлений, действующих на торцы цилиндра, равна

$$F_0 = \pi R^2 \Delta P. \quad (5)$$

Следовательно, их отношение равно

$$\frac{F_{\text{бок.}}}{F_0} = \frac{\pi R h \Delta P}{\pi R^2 \Delta P} = \frac{h}{R} \ll 1. \quad (6)$$

Таким образом, в рассматриваемой ситуации силами вязкого трения можно пренебречь, по сравнению с разностью сил давления. Правда, эта разность сил давления зависит от расхода жидкости.



Часть 2. Описание эффекта (пробирка в пробирке).

2.1 При опускании пробирки на нее действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и сила давления жидкости на дно пробирки $F = \pi R^2 \Delta P$. Как было показано ранее, в подобной ситуации можно пренебречь силой вязкого трения. Здесь ради укорочения формулой мы обозначили ΔP - разность между давлением жидкости на глубине z и атмосферным давлением. Поэтому уравнение движения пробирки в квазистационарном приближении имеет вид

$$mg = \pi R^2 \Delta P. \quad (7)$$

Отметим, что для величины ΔP нельзя использовать формулу для гидростатического давления, так жидкость в зазоре движется. Поэтому для нахождения этого давления запишем уравнение второго закона Ньютона для жидкости в зазоре (опять в квазистационарном приближении):

$$\Delta P \cdot 2\pi Rh = \rho(2\pi Rhz)g + F_{\text{вязк.}} \quad (8)$$

Смысл которого очевиден: разность сил давления уравнивается силами тяжести и вязкого трения, действующими на воду в зазоре. Для силы вязкого трения справедлива полученная ранее формула (3). С ее учетом, получим

$$\Delta P \cdot 2\pi Rh = \rho(2\pi Rhz)g + \frac{12\eta z}{h^2}q \Rightarrow \Delta P = \rho gz + \frac{6\eta}{\pi Rh^3}zq \quad (9)$$

Расход воды, протекающей через зазор можно выразить через скорость движения пробирки (вся жидкость, вытесненная пробиркой, должна протечь через зазор): $q = \pi R^2 v$. Подставляя эти выражения в уравнение (7) получим

$$mg = \pi R^2 \left(\rho gz + \frac{6\eta z}{\pi Rh^3} \pi R^2 v \right) = \pi R^2 \rho gz + \frac{6\pi\eta R^3}{h^3} zv. \quad (10)$$

Движение пробирки прекратится, когда скорость станет равной нулю, соответствующая максимальная глубина погружения определяется формулой:

$$z_{\text{max}} = \frac{m}{\pi R^2 \rho}. \quad (11)$$

Зависимость скорости от координаты z можно выразить из уравнения (10)

$$v = \frac{mg - \pi R^2 \rho g z}{\frac{6\pi\eta R^3}{h^3} z} = \frac{\rho g h^3}{6\eta R} \frac{z_{\max} - z}{z} \quad (12)$$

Обозначим коэффициент в этой формуле (он имеет размерность скорости) $\frac{\rho g h^3}{6\eta R} = v_0$, тогда зависимость (12) приобретает вид

$$v = v_0 \frac{z_{\max} - z}{z}. \quad (13)$$

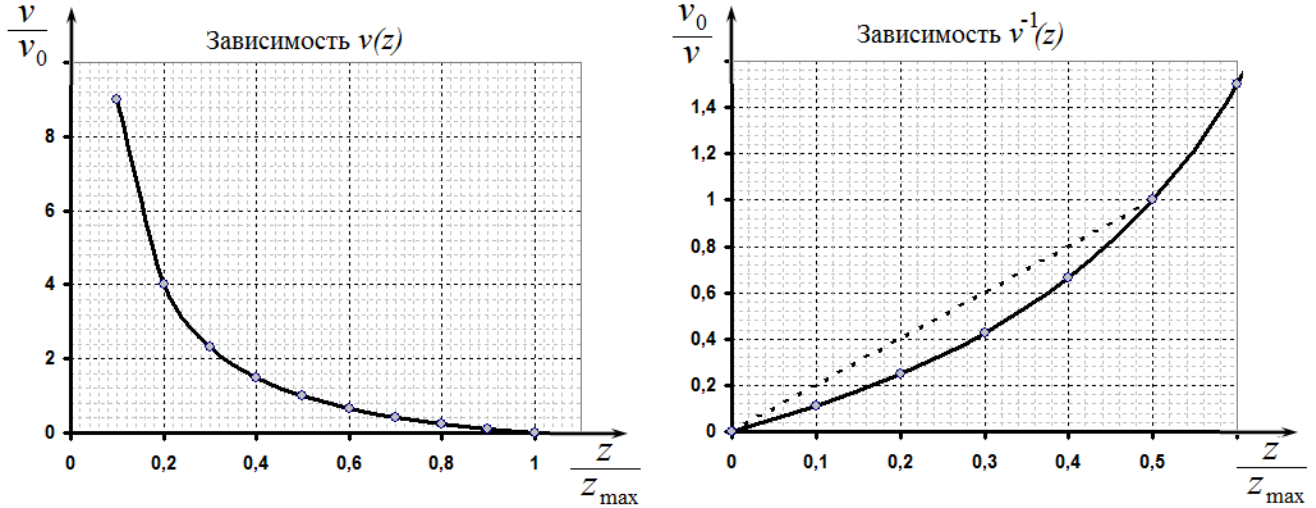
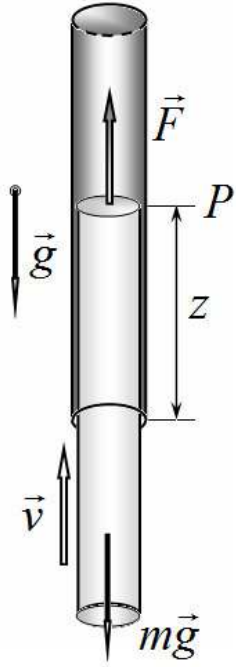


График этой функции показан на рисунке. Для оценки времени движения в указанном диапазоне можно построить график обратной зависимости $v^{-1}(z)$ (см. рис.), тогда площадь под этим графиком численно равна времени движения, т.к. $\Delta t = \frac{\Delta z}{v}$. Для оценки площади плавную кривую можно заменить отрезком прямой. На построенном графике в относительных единицах эта площадь равна 0,25. Переход к обычным единицам приводит к результату

$$\tau \approx 0,25 \frac{z_{\max}}{v_0} \approx 0,25 \frac{6\eta R m}{\pi R^2 \rho^2 g h^3}. \quad (14)$$

Замечания. 1. Формула (11) может быть получена непосредственно из условия равновесия в пробирки (когда справедливы законы статики) – сила тяжести пробирки уравнивается силой Архимеда. 2. Точное значение времени движения может быть вычислено путем строгого интегрирования. Рассчитанное значение площади под кривой равно 0,2. Иными словами допущенная погрешность составляет величину порядка 20%. 3. Формально в рассмотренном квазистационарном приближении пробирка стартует с бесконечно большой скоростью. Это связано с тем, что в начальном положении пробирки отсутствует сила вязкого трения. Однако на конечный результат, это обстоятельство не играет существенной роли.



2.2 Описание движения пробирки в перевернутом положении проводится аналогично проведенному в п. 2.2. Уравнение движения пробирки имеет вид

$$mg = \pi R^2 \Delta P. \quad (15)$$

здесь ΔP - разность между атмосферным давлением и давлением воды на высоте z (которое меньше атмосферного). Закон движение воды в зазоре

$$\rho(2\pi R h z)g - \Delta P \cdot 2\pi R h = F_{\text{вязк}}. \quad (16)$$

Для силы вязкого трения, по-прежнему, справедлива формула (3), поэтому разность давлений в этом случае оказывается равным

$$\rho(2\pi R h z)g - \Delta P \cdot 2\pi R h = \frac{12\eta l}{h^2} q \Rightarrow \Delta P = \rho g z - \frac{6\eta R}{h^3} z v \quad (17)$$

А уравнение движения пробирки

$$mg = \pi R^2 \rho g z - \frac{6\pi\eta R^3}{h^3} z v. \quad (18)$$

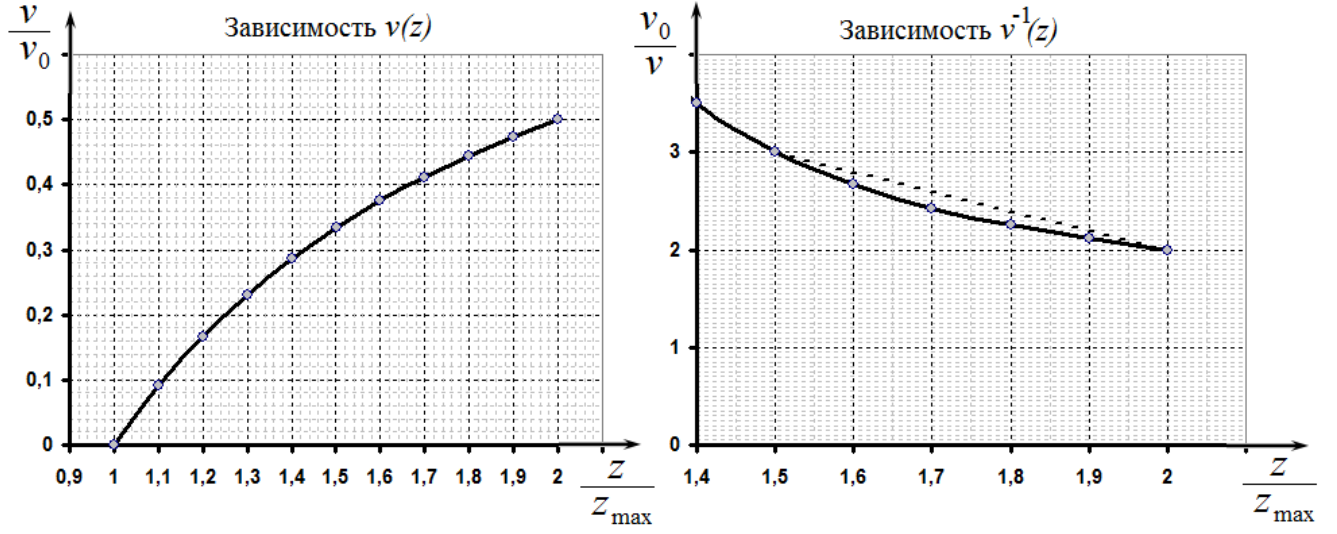
Из этого уравнения следует, что минимальная высота подъема пробирки, при которой начнется ее движение вверх, равна

$$z_{\min} = \frac{m}{\pi R^2 \rho}, \quad (19)$$

что совпадает с максимальной глубиной погружения, полученной ранее. Зависимость скорости подъема имеет вид

$$v = \frac{\rho g h^3}{6\eta R} \frac{z - z_{\min}}{z}. \quad (20)$$

Отметим, что в данном случае формула имеет смысл при $z > z_{\min}$.



Графики этой зависимости и обратной ей $v^{-1}(z)$ показаны на рисунках. Оценка времени движения в указанном диапазоне (проведенная по линейной аппроксимации зависимости $v^{-1}(z)$) равна

$$\tau \approx 0,75 \frac{z_{\max}}{v_0} \approx 0,75 \frac{6\eta R m}{\pi R^2 \rho^2 g h^3}. \quad (21)$$

3.1 Так как пробирка начинает подниматься при высоте ее погружения равной $l/4$, то при этом положении сила Архимеда равна силе тяжести:

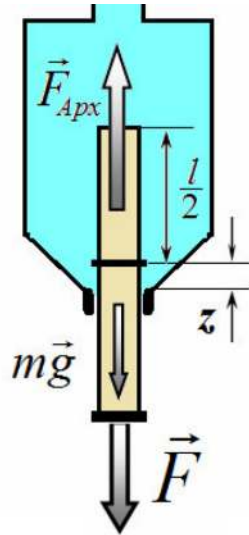
$$\rho g S \frac{l}{4} = mg \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{4} \rho S l. \quad (22)$$

(22)

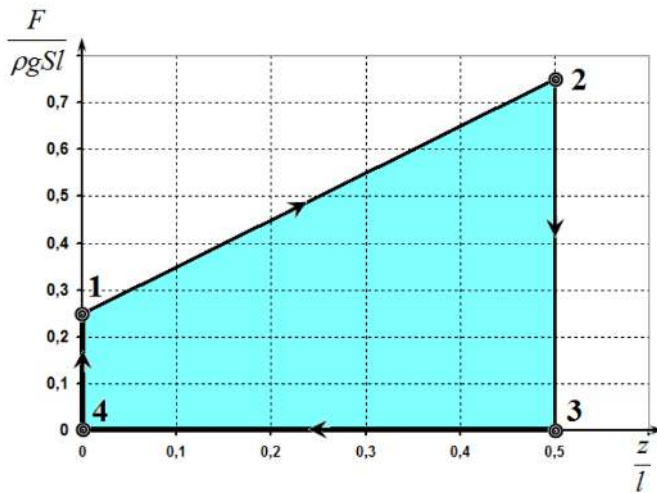
азистационарным, то
 igitся в равновесии,
 (22)):

⇒

(23)



ксимальной высоты,
 нняя сила падает до



3.2 Так как процесс подъема можно считать квазистационарным, то при любом положении пробирки она находится в равновесии, условие которого имеет вид (с учетом формулы (22)):

$$\rho g S \left(\frac{l}{2} + z \right) = mg + F \Rightarrow$$

$$F = \rho g S l \left(\frac{z}{l} + \frac{1}{4} \right) \quad (23)$$

После того, как пробирка поднялась до максимальной высоты, внешнее устройство отключается, поэтому внешняя сила падает до $F = 0$. Так как вода наливается из резервуара быстро, то можно пренебречь просачиванием воды из бутылки за время ее опускания. Эти рассуждения позволяют построить график рассматриваемого циклического процесса: 1 → 2: подъем пробирки, описываемый уравнением (23); 2 → 3: отключение внешнего устройства; 3 → 4: опускание пробирки; 4 → 1: подключение внешнего устройства. 3.3 Из построенного графика следует, что работа совершенная подъемником равна

$$A = \frac{1}{4} \rho g S l^2 \quad (24)$$

3.4 Подъемник совершает полезную работу за счет того, что вода выливается через зазор между пробиркой и горлышком бутылки. Объем вытекшей за цикл воды равен половине объема

пробирки, т.е. $\frac{1}{2}Sl$. Чтобы подъемник работал необходимо, чтобы уровень воды в бутылке превышал длину пробирки l . Поэтому минимальная высота, с которой должна выливаться вода также равна l . Следовательно, изменение ее потенциальной энергии равно $\Delta U = \frac{1}{2}\rho gSl^2$. Разумно определить КПД как отношение полезной работы к затраченной энергии. В этом случае КПД оказывается равным $\eta = \frac{A}{\Delta U} = 50\%$.