

Условие

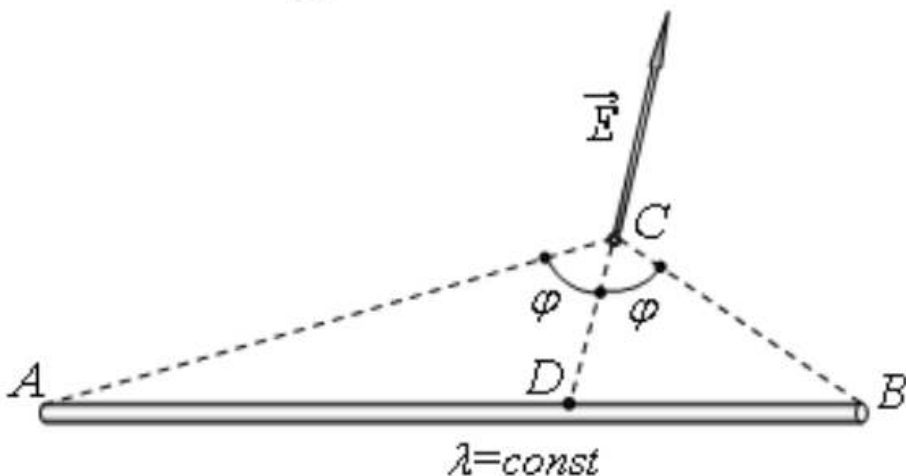
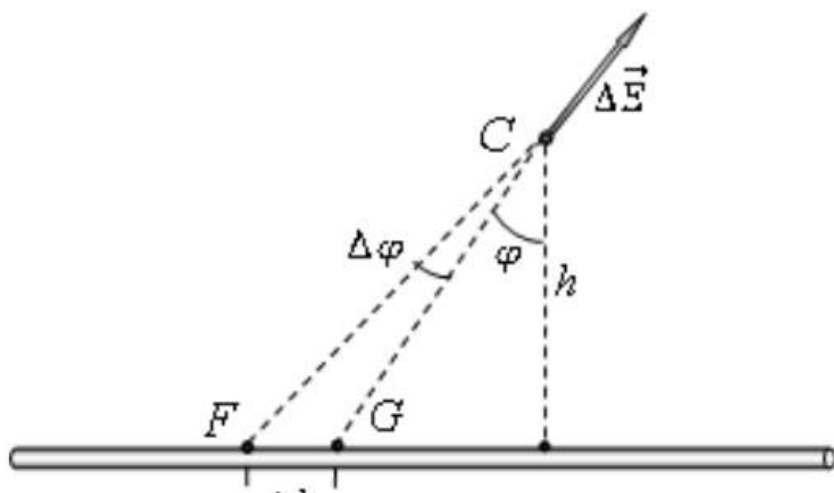
Задача 10-2. Заряженный стержень

Тонкий диэлектрический стержень АВ, положительно заряженный с постоянной линейной плотностью λ , находится в воздухе (вакууме).

1.1 Рассмотрим малый участок $FG = \Delta l$ стержня, который виден из точки C пространства под малым углом $\Delta\varphi$, (см. рис.), причем $\Delta\varphi \ll \varphi$. Покажите, что модуль ΔE напряженности электростатического поля, создаваемого этим участком стержня в точке C , пропорционален величине угла $\Delta\varphi$, и может быть представлен в виде $\Delta E = k_1 \cdot \Delta\varphi$. Найдите коэффициент пропорциональности k_1 .

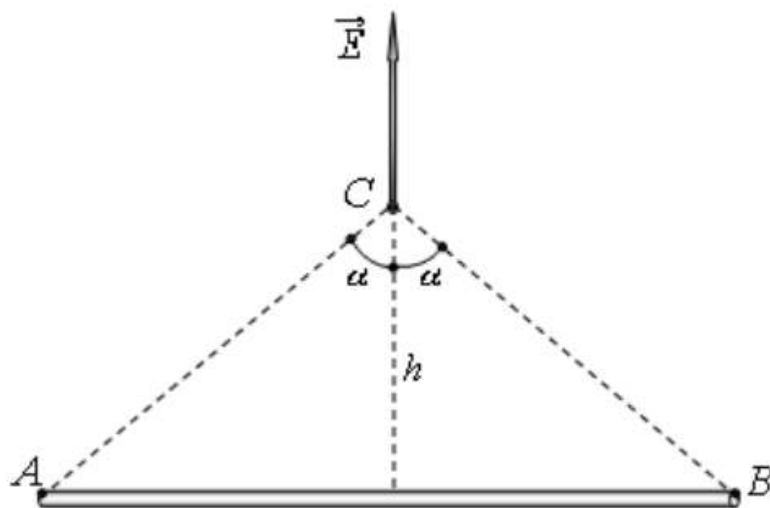
$|B,$
ой

ня,
им
то
ля,



нности
 AB в

нности
тонким
ью λ



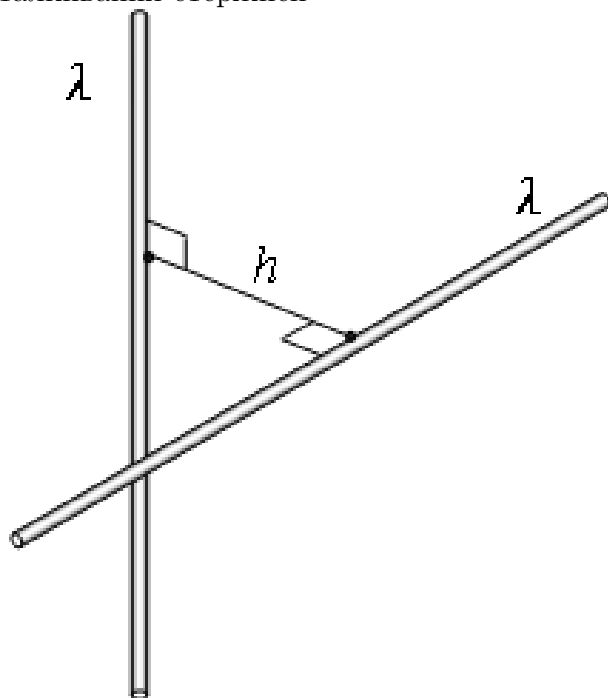
1.2 Докажите, что вектор напряженности электростатического поля, создаваемого стержнем AB , направлен вдоль биссектрисы DC угла ACB , (см. рис.). Данный результат Вы можете использовать в последующих пунктах задачи, даже если не смогли его доказать.

1.3 Вычислите модуль E_C напряженности электростатического поля, создаваемого стержнем AB в точке C на оси симметрии стержня.

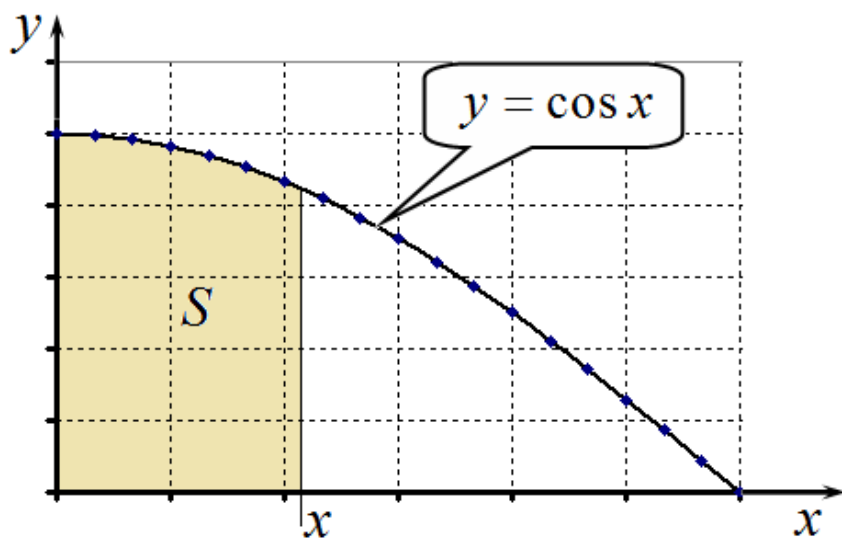
1.4 Найдите выражение $E(h)$ для модуля напряженности электростатического поля, создаваемого тонким заряженным с постоянной линейной плотностью λ бесконечным стержнем,

на расстоянии h от него.

1.5 Два тонких длинных (бесконечных), заряженных с постоянной поверхностной плотностью $\lambda = 25 \text{ нКл/м}$ стержня скрещиваются в пространстве под прямым углом (см.рис.). Расстояние между ближайшими точками стержней $h = 1,0 \text{ м}$. Найдите силу $\vec{F}$ электростатического отталкивания стержней

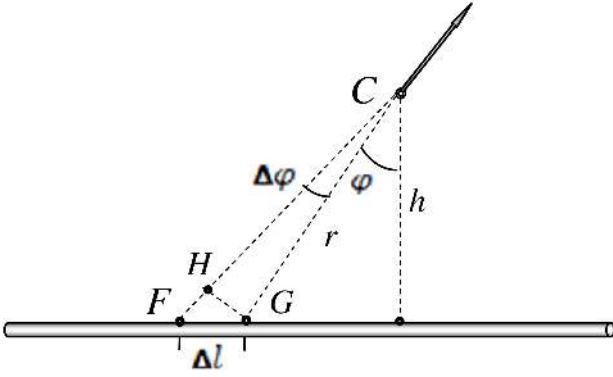


Математическая подсказка: площадь S под графиком функции $y(x) = \cos(x)$ на участке от нуля до x , вычисляется по формуле $S = \sin(x)$.



Решение

Задача 10-2. Заряженный стержень



1.1 Выделим на стержне маленький участок $FG = \Delta l$, который виден из точки C под малым углом $\Delta\varphi$ и находится на расстоянии $r = CG$ от точки C , а также на угловом расстоянии φ от отрезка h (см. рис.) С учетом того, что угол HGF также равен φ можем записать

$$\cos \varphi = \frac{h}{GC} = \frac{h}{r} = \frac{GH}{\Delta l} = \frac{r \Delta \varphi}{\Delta l}, \quad (1)$$

откуда следует, что

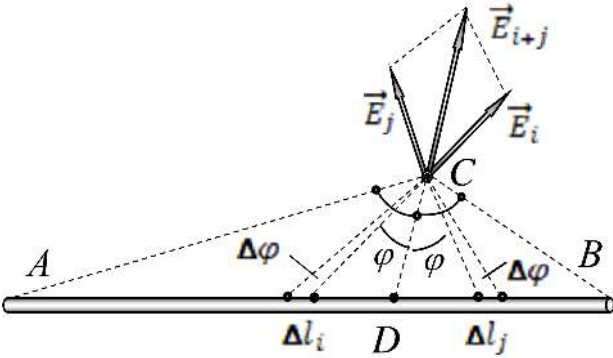
$$\Delta l = \frac{r^2}{h} \Delta \varphi. \quad (2)$$

Поскольку стержень заряжен равномерно, то на участке стержня Δl находится заряд $\Delta q = \lambda \Delta l$, который, согласно закону Кулона, создаёт в точке C напряжённость $\Delta \vec{E}$, равную по модулю

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \frac{r^2}{h} \Delta \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \Delta \varphi. \quad (3)$$

Поскольку для разных участков стержня величины λ и h постоянны, то из (3) следует неожиданный вывод, что $\Delta \vec{E}$ не зависит ни от r , ни от φ , а определяется только малым углом $\Delta\varphi$, под которым данный малый отрезок виден из точки C . Соответственно, из (3) найдем искомое значение коэффициента пропорциональности

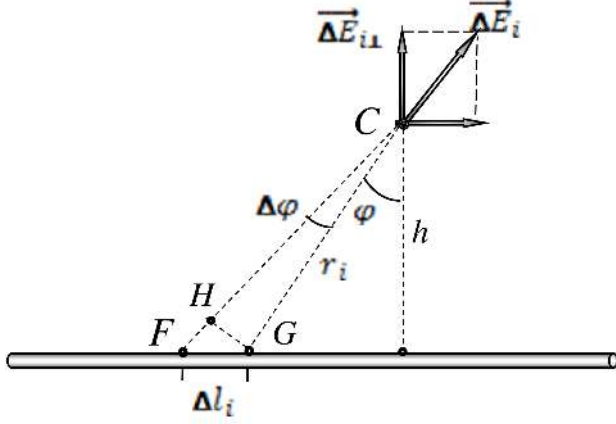
$$k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} = 1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{Кл} \cdot \text{рад}} = 1,5 \frac{\text{кН}}{\text{Кл} \cdot \text{рад}} \quad (4)$$



1.2 Рассмотрим два симметричных (по углу φ) относительно биссектрисы DC малых участка стержня Δl_i и Δl_j , имеющих одинаковую угловую ширину $\Delta\varphi$. Согласно (3), векторы напряжённостей $\vec{E}_i$ и $\vec{E}_j$, создаваемые ими, равны по модулю и симметричны относительно биссектрисы угла. Следовательно, их сумма $\vec{E}_{i+j}$ ориентирована вдоль биссектрисы угла.

Заметим, что длины (и заряды!) отрезков Δl_i и Δl_j различны, но согласно (2) большему отрезку соответствует большее расстояние, что и приводит к равенству модулей соответствующих напряжённостей. Разбивая стержень на подобные пары и суммируя их напряжённости, приходим к выводу, что напряжённость $\vec{E}$ электростатического поля всего стержня также направлена вдоль биссектрисы угла $\hat{ACB}$.

1.3 Для вычисления нормального компонента $\vec{E}_\perp$ напряжённости электростатического поля всего стержня рассмотрим малый элемент стержня длиной Δl_i (Рис.), находящийся на расстоянии r_i от точки наблюдения. Пусть нормальный компонент поля этого



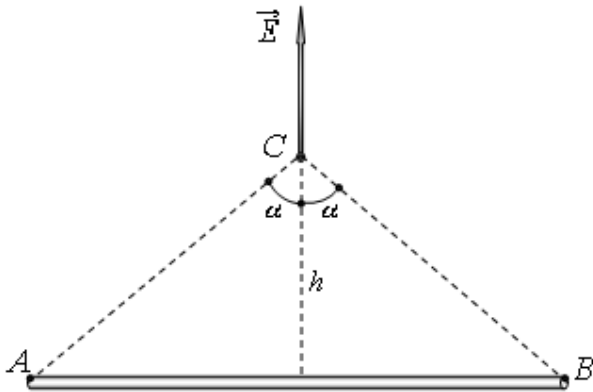
элемента равен $E_{i\perp} = E_i \cos \varphi_i$. Тогда искомая величина $E_\perp$ будет представлена суммой

$$E_\perp = \sum_i E_{i\perp} = \sum_i E_i \cos \varphi_i \quad (5)$$

Однако, с учётом (3), сумма значительно упрощается. Действительно, при таком подходе имеем

$$E_\perp = \sum_i E_i \cos \varphi_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \cos \varphi_i \Delta\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \sum_i \cos \varphi_i \Delta\varphi_i \quad (6)$$

сумма $S = \sum_i \cos \varphi_i \Delta\varphi_i$, входящая в выражение (6), представляет собой площадь под



графиком функции $y(x) = \cos(x)$. И, согласно математической подсказке в условии, равна $S = \sum_i \cos \varphi_i \Delta\varphi_i = \sin \varphi$. Заметим, что геометрический смысл этой суммы – сумма проекций хорд на диаметр окружности. Это замечание вполне позволяет получить математическую подсказку в условии самостоятельно. Таким образом, часть заряженного стержня, соответствующая углу α в условии, создает нормальную напряжённость $E_{\perp\alpha} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \sin \alpha$, а вторая часть стержня – точно такую же.

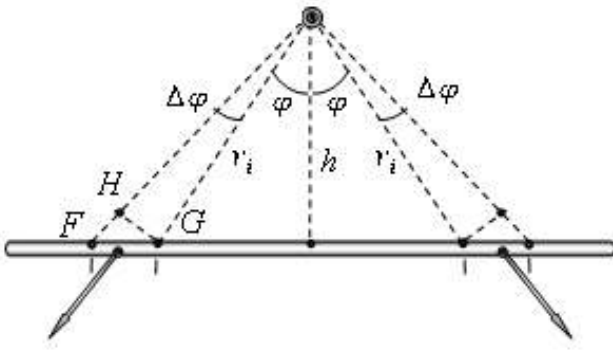
$$E_C = 2E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} (\sin \alpha + \sin \alpha) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \sin \alpha \quad (7)$$

Естественно, что вектор $\vec{E}_{\perp}$ ориентирован перпендикулярно стержню в направлении «от него». Если бы заряд стержня был отрицателен, то направление было бы «к нему». **1.4** Для перехода к полю бесконечного тонкого равномерно заряженного стержня в формуле (7) следует положить $\alpha = \frac{\pi}{2}$. При этом получаем, что напряженность электростатического поля бесконечного стержня на расстоянии h от него равна по модулю

$$E(h) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \sin \frac{\alpha + \alpha}{2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \quad (8)$$

и направлена перпендикулярно стержню. **1.6** Изобразим скрещивающиеся заряженные стержни на чертеже так, чтобы один из них (создающий поле) был виден в виде точки, а второй (на который действует поле) – находился в плоскости чертежа. На маленький кусочек FG стержня длиной

$$FG = \Delta l = \frac{HG}{\cos \varphi} = \frac{r \Delta \varphi}{\cos \varphi} \quad (9)$$



действует сила, определяемая зарядом $\lambda \Delta l$ рассматриваемого кусочка и полем $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ в данной точке пространства. Поскольку силы, действующие вдоль стержня, будут скомпенсированы, то нам следует искать только силы, перпендикулярные к стержню. Тогда для участка FG можем записать

$$\Delta F = E(r) \lambda \Delta l \cos \varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \lambda \frac{r \Delta \varphi}{\cos \varphi} \cos \varphi = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \Delta \varphi \quad (10)$$

Суммируя (10) по всем кусочкам стержня, найдем величину силы электростатического расталкивания стержней, которая перпендикулярна стержню и ориентирована по продолжению высоты h на рисунке

$$F = \sum_i \Delta F_i = \sum_i \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \Delta \varphi_i = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \sum_i \Delta \varphi_i = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \pi = \frac{\lambda^2}{2\epsilon_0} = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ Н} = 35 \text{ мкН}. \quad (11)$$

Интересно, что сила взаимодействия между заряженными стержнями не зависит от расстояния h между ними. Следовательно, при изменении расстояния h ответ (11) не изменится. Это связано с влиянием двух факторов: при удалении стержней друг от друга поле, естественно, уменьшается, но увеличивается заряд, попадающий на отрезок FG стержня при данном угле $\Delta \varphi$.