

Условие

Задача 10- 3. Термоэлектрические явления.

Современная теория строения металлов основывается на законах квантовой физики. Однако и более простые классические теории позволяют описывать многие свойства металлов. Одной из простейших теорий, описывающих явления тепло- и электропроводности в металлах, является теория металлов Друде, предложенная немецким физиком Паулем Друде в 1900 году. Теория основывается на следующих предположениях:

- 1) кристаллическая решётка металла образована положительно заряженными ионами, которые считаются неподвижными, электроны же внутри металла свободны и образуют электронный газ, который считается идеальным;
- 2) электрон - электронными столкновениями пренебрегают, рассматривая только столкновения электронов с ионами;
- 3) в интервале между столкновениями не учитывается взаимодействие электрона с другими электронами и ионами решетки;
- 4) столкновения мгновенно изменяют скорость электрона, причём скорость электрона после столкновения не зависит от его скорости до столкновения, направлена случайно, а её величина соответствует температуре проводника, в области столкновения;
- 5) время между двумя последовательными столкновениями является случайной величиной, среднее значение которого определяется свойствами металла и равно τ (эта величина также называется временем релаксации); средний квадрат времени между столкновениями равен $2\tau^2$;

В данной задаче вам предстоит в рамках теории Друде рассчитать некоторые характеристики меди.

Вам могут понадобиться значения следующих величин:

элементарный заряд $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл ;

масса электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг ;

число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ ;

постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж · К⁻¹ ;

атомная масса меди $A_{Cu} = 6,36 \cdot 10^{-2}$ кг · моль⁻¹ ;

валентность меди $Z_{Cu} = 1$;

плотность меди $\rho_{Cu} = 8,92 \cdot 10^3$ кг · м⁻³ ;

удельное сопротивление меди $\gamma_{Cu} = 1,68 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

* элементарный заряд $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл ; * масса электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг ; * постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ ; * постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж · К⁻¹ ; * атомная масса меди $A_{Cu} = 6,36 \cdot 10^{-2}$ кг · моль⁻¹ ; * валентность меди $Z_{Cu} = 1$; * плотность меди $\rho_{Cu} = 8,92 \cdot 10^3$ кг · м⁻³ ; * удельное сопротивление меди $\gamma_{Cu} = 1,68 \cdot 10^{-8}$ Ом · м .

Часть 1. Закон Ома.

В данной части вам необходимо доказать, что из теории Друде следует закон Ома для участка цепи, который в дифференциальной форме имеет вид

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1)$$

*Где $\vec{j}$ - вектор плотности тока, $\vec{E}$ - напряженность поля внутри проводника, σ - его удельная

проводимость.

1.1 Найдите концентрацию электронов в меди n и рассчитайте её численное значение.

1.2 Найдите среднеквадратичную скорость движения электронов меди $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ температуре и рассчитайте её численное значение при температуре $T = 300$ К.

Пусть внутри металла существует однородное электрическое поле напряженности $\vec{E}$.

1.3 Найдите среднюю скорость $\langle \vec{v} \rangle$ упорядоченного движения электронов в меди в этом случае. Покажите, что эта скорость пропорциональна напряженности электрического поля $\vec{E}$.

1.4 Выразите удельную проводимость металла σ через среднее время между столкновениями τ .

1.5 Используя экспериментальные значения характеристик меди, рассчитайте численное значение среднего времени между столкновениями τ .

1.6 Рассчитайте численное значение средней скорости упорядоченного движения электронов в меди при плотности тока $j_0 = 1,0 \text{ А} \cdot \text{мм}^{-2}$.

Часть 2. Закон Джоуля – Ленца.

В данной части вам необходимо доказать. Что из теории Друде следует закон Джоуля – Ленца, который в дифференциальной форме выражается формулой

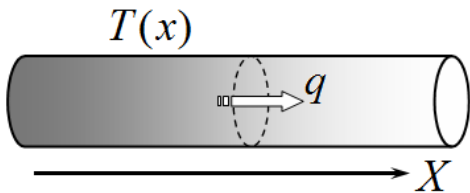
$$w = \frac{1}{\sigma} j^2, \quad (2)$$

где w - мощность теплоты, выделяющаяся в единице объема проводника при прохождении тока плотности j .

Пусть температура проводника постоянна и равна T . Внутри проводника существует однородное электрическое поле напряженности $\vec{E}$.

2.1 Найдите среднюю энергию $\langle \varepsilon \rangle$, передаваемую электроном кристаллической решётке за одно столкновение.

2.2 Покажите, что мощность теплоты, выделяющейся в единице объема, описывается формулой (2).



Часть 3. Закон Видемана – Франца.

Пусть металлический стержень неравномерно нагрет так, что его температура изменяется вдоль стержня и описывается функцией $T(x)$

В этом случае в стержне будет существовать поток теплоты, который описывается законом Фурье

$$q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (3)$$

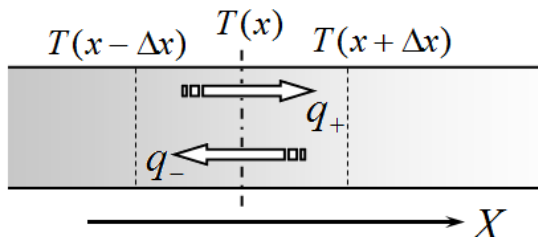
где q - плотность потока теплоты (количество теплоты, перетекающей через площадку единичной площади в единицу времени), κ - коэффициент теплопроводности материала стержня.

Теплопроводность металлов главным образом обусловлена движением электронов, поэтому между теплопроводностью и электропроводностью металлов должна существовать связь. Эта связь была экспериментально обнаружена в 1853 году и носит название закона Видемана – Франца, который утверждает, что отношение

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = L \quad (4)$$

является постоянной величиной для всех металлов и называется числом Лоренца L .

В данной части вам необходимо доказать, что из модели Друде следует закон Видемана – Франца, а также рассчитать постоянную Лоренца.



3.1 Запишите выражения для плотностей потоков энергии, переносимой электронами в положительном q_+ и отрицательном q_- направлении оси X , а также суммарного потока энергии q .

Используйте приближенную формулу, справедливую при медленном изменении функции

$$T(x \pm \Delta x) = T(x) \pm \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right) \Delta x \quad (5)$$

3.2 Получите формулу для теплопроводности металла и рассчитайте ее численное значение для меди при температуре $T = 300$ К

3.3 Рассчитайте численное значение постоянной Лоренца L .

Часть 4. Эффект Томсона.

При прохождении электрического тока по неоднородно нагретому проводнику выделяется дополнительное (по сравнению с теплотой Джоуля – Ленца) количество теплоты (это явление называется эффектом Томсона). Эффектом Томсона называется дополнительное выделение или поглощение теплоты при прохождении тока в неравномерно нагретом проводнике. В данной части задачи вам необходимо показать, что модель Друде объясняет этот эффект и получить формулу для расчета мощности теплоты Томсона.

Пусть температура медного стержня металла не зависит от времени, но зависит от координаты по закону

$$T(x) = T_0 + \lambda x, \quad (6)$$

где T_0 и λ - известные положительные константы. По стержню протекает электрический ток плотности j .

4.1 При каком направлении тока теплота Томсона будет положительной, а при каком отрицательной?

4.2 Найдите мощность теплоты, выделяющейся в единице объема стержня (плотность мощности) p в описанном случае.

4.3 Покажите, что мощность дополнительной теплоты Томсона пропорциональна плотности тока j и градиенту температуры λ . Получите выражение для коэффициента пропорциональности.

Решение

Задача 10- 3. Термоэлектрические явления.

Часть 1. Закон Ома.

1.1. На каждый ион в металле приходится Z электронов, причём массой электронов в сравнении с массой иона можно пренебрегать. В соответствии с этим

$$n = \frac{N}{V} = \frac{Z \frac{\rho V N_A}{A}}{V} = \frac{Z \rho N_A}{A} = 8,44 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$$

$$n = \frac{N}{V} = \frac{Z \frac{\rho V N_A}{A}}{V} = \frac{Z \rho N_A}{A} = 8,44 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}. \quad (1)$$

1.2. Так как электронный газ считается идеальным, к нему можно применить методы кинетической теории газов, в соответствии с чем

$$\frac{m_e \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3kT}{2} \Rightarrow \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = 1,17 \cdot 10^5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$\frac{m_e \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3kT}{2} \Rightarrow \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = 1,17 \cdot 10^5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (2)$$

1.3. В электрическом поле в соответствии со вторым законом Ньютона для электронов

$$e\vec{E} = m_e \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

время t после

$$e\vec{E} = m_e \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Тогда по прошествии времени t после предыдущего столкновения электрон имеет скорость

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e}, \quad (4)$$

где $\vec{v}_0$ — скорость, полученная электроном в результате столкновения. Тогда, учитывая, что среднее время между столкновениями равно времени релаксации, а скорость после столкновения направлена случайным образом, получаем, что

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e} \rangle = \langle \frac{e\vec{E}t}{m_e} \rangle = \frac{e\vec{E} \langle t \rangle}{m_e} = \frac{e\vec{E} \tau}{m_e}.$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e} \rangle = \langle \frac{e\vec{E}t}{m_e} \rangle = \frac{e\vec{E} \langle t \rangle}{m_e} = \frac{e\vec{E} \tau}{m_e}. \quad (5)$$

1.4. Плотность тока в данном случае найдем

$$\vec{j} = ne \langle \vec{v} \rangle = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{j} = ne \langle \vec{v} \rangle = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad (6)$$

по закону Ома. Тогда

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}. \quad (7)$$

1.5. С учетом (7) для среднего времени между столкновениями получаем

$$\gamma = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{ne^2\tau} \Rightarrow \tau = \frac{m}{ne^2\gamma} = 2,51 \cdot 10^{-14} \text{ с}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{ne^2\tau} \Rightarrow \tau = \frac{m}{ne^2\gamma} = 2,51 \cdot 10^{-14} \text{ с}. \quad (8)$$

Часть 2. Закон Джоуля-Ленца.

2.1. Найдем среднюю энергию, передаваемую электроном кристаллической решетке за одно столкновение. Если $\vec{v}_1$ — скорость электрона сразу после столкновения, а $\vec{v}_0$ — непосредственно перед ним, то

$$H = \frac{m_e}{2} (\langle v_1^2 \rangle - \langle v_0^2 \rangle)$$

$$H = \frac{m_e}{2} (\langle v_1^2 \rangle - \langle v_0^2 \rangle) \quad (9)$$

$$\langle v_1^2 \rangle = \left\langle \left(\vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e} \right)^2 \right\rangle \approx \langle v_0^2 \rangle + 2 \left(\frac{eE}{m_e} \right)^2 \langle \tau^2 \rangle = \langle v_0^2 \rangle + 2 \left(\frac{eE\tau}{m_e} \right)^2$$

Выражение для $\vec{v}_1$ удобно привести к виду

$$\langle v_1^2 \rangle = \left\langle \left(\vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e} \right)^2 \right\rangle \approx \langle v_0^2 \rangle + 2 \left(\frac{eE}{m_e} \right)^2 \langle \tau^2 \rangle = \langle v_0^2 \rangle + 2 \left(\frac{eE\tau}{m_e} \right)^2$$

из которого следует искомое значение

$$\langle v_1^2 \rangle = \left\langle \left(\vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e} \right)^2 \right\rangle = \langle v_0^2 \rangle + \left(\frac{eE}{m_e} \right)^2 \langle \tau^2 \rangle = \langle v_0^2 \rangle + 2 \left(\frac{eE\tau}{m_e} \right)^2 \Rightarrow H = \frac{(eE\tau)^2}{m_e} \quad (10)$$

$$\langle v_1^2 \rangle = \left\langle \left(\vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e} \right)^2 \right\rangle = \langle v_0^2 \rangle + \left(\frac{eE}{m_e} \right)^2 \langle \tau^2 \rangle = \langle v_0^2 \rangle + 2 \left(\frac{eE\tau}{m_e} \right)^2 \Rightarrow H = \frac{(eE\tau)^2}{m_e}$$

2.2. Тогда мощность, выделяемую в единице объема, можно найти как

$$w = \frac{n}{\tau} H = \frac{n\tau(eE)^2}{m_e} = \sigma E^2 = 5,95 \cdot 10^{11} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3} \quad (11)$$

$$w = \frac{n}{\tau} H = \frac{n\tau(eE)^2}{m_e} = \sigma E^2 = 5,95 \cdot 10^{11} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3}$$

Как следует из закона Ома в дифференциальной форме

$$j = \sigma E \Rightarrow P = \frac{j^2}{\sigma} LS \quad (12)$$

$$j = \sigma E \Rightarrow P = \frac{j^2}{\sigma} LS$$

где L и S — длина и площадь сечения стержня соответственно. Тогда

$$w = \frac{(jS)^2}{\sigma S} L \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{\sigma} j^2 \quad (13)$$

$$w = \frac{(jS)^2}{\sigma S} L \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{\sigma} j^2$$

Часть 3. Закон Видемана - Франца.

3.1. Перенос теплоты осуществляется за счёт того, что электроны, пришедшие из областей с более высокой температурой, сталкиваясь с ионами в областях с меньшей температурой, отдают им больше энергии, чем получают от них. Рассмотрим некоторое поперечное сечение внутри металла. В среднем половина электронов приходит в эту точку со стороны положительного направления оси x , а половина — со стороны отрицательного.

Тогда плотность потока теплоты, обусловленная электронами, пришедшими со стороны отрицательного направления оси x с проекцией скорости v_x равна

$$q_-(x) = \frac{1}{2} n_x v_x \cdot \frac{3}{2} kT(x - v_x \tau) \quad (14)$$

с отрицательного направления оси x с пр

$$q_-(x) = \frac{1}{2} n_x v_x \cdot \frac{3}{2} kT(x - v_x \tau)$$

а с положительного —

$$q_+(x) = -\frac{1}{2} n_x v_x \cdot \frac{3}{2} kT(x + v_x \tau) \quad (15)$$

$$q_+(x) = -\frac{1}{2} n_x v_x \cdot \frac{3}{2} kT(x + v_x \tau)$$

где n_x — концентрация электронов с проекцией скорости v_x .

Тогда полная плотность потока теплоты для электронов с проекцией скорости v_x равна

$$q(x) = \frac{3}{4} k n_x v_x (T(x - v_x \tau) - T(x + v_x \tau)) \quad (16)$$

$$q(x) = \frac{3}{4} k n_x v_x (T(x - v_x \tau) - T(x + v_x \tau))$$

Предполагая, что температура меняется незначительно на длине свободного пробега электрона, получаем, что

$$T(x \pm v_x \tau) \approx T(x) \pm v_x \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) \Rightarrow q(x) = -\frac{3}{2} k n_x v_x^2 \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) \quad (17)$$

$$T(x \pm v_x \tau) \approx T(x) \pm v_x \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) \Rightarrow q(x) = -\frac{3}{2} k n_x v_x^2 \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x)$$

$$q(x) = - \sum \frac{3}{2} k n_x v_x^2 \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) = - \frac{3}{2} k n \langle v_x^2 \rangle \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) = - \frac{1}{2} k n \langle v^2 \rangle \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x)$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle.$$

$$q(x) = - \sum \frac{3}{2} k n_x v_x^2 \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) = - \frac{3}{2} k n \langle v_x^2 \rangle \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) = - \frac{1}{2} k n \langle v^2 \rangle \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x), \quad (18)$$

так как $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$.

3.2. Для теплопроводности металла (меди) получаем следующее значение

$$\kappa = \frac{1}{2} k n \langle v^2 \rangle \tau = 1,99 \cdot 10^2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$$

$$\kappa = \frac{1}{2} k n \langle v^2 \rangle \tau = 1,99 \cdot 10^2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}. \quad (19)$$

3.3. Численное значение постоянной Лоренца найдем из формулы подсказки

$$L = \frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{3}{2} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 1,12 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{Ом} \cdot \text{К}^{-2}$$

$$L = \frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{3}{2} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 1,12 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{Ом} \cdot \text{К}^{-2}. \quad (20)$$

Часть 4. Эффект Томсона.

4.1. Рассуждения в данном пункте практически полностью повторяют оные из пункта 2.1. Действительно, при этом

$$\langle v_Q \rangle = \left\langle \frac{1}{2} (v_x(x - v_x \tau) - v_x(x + v_x \tau)) \right\rangle = - \langle \tau v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \rangle$$

$$\langle v_Q \rangle = \left\langle \frac{1}{2} (v_x(x - v_x \tau) - v_x(x + v_x \tau)) \right\rangle = - \langle \tau v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \rangle \quad (21)$$

С учетом правил работы с бесконечно малыми величинами, данное выражение можно преобразовать как

$$\langle v_Q \rangle = - \langle \tau v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \rangle = - \left\langle \frac{\tau \Delta v_x^2}{2 \Delta x} \right\rangle = - \frac{\tau \Delta \langle v_x^2 \rangle}{2 \Delta x} = - \frac{\tau \Delta \langle v^2 \rangle}{6 \Delta x} = - \frac{k \tau}{2 m_e} \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$\langle v_Q \rangle = - \langle \tau v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \rangle = - \left\langle \frac{\tau \Delta v_x^2}{2 \Delta x} \right\rangle = - \frac{\tau \Delta \langle v_x^2 \rangle}{2 \Delta x} = - \frac{\tau \Delta \langle v^2 \rangle}{6 \Delta x} = - \frac{k \tau}{2 m_e} \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (22)$$

4.2. Пусть электрон испытывает одно столкновение в точке с координатой $x - d$, а второе — в точке с координатой x . Тогда выделение теплоты во втором столкновении равно

$$Q = \frac{m_e}{2} (\langle v_1^2 \rangle - \langle v_0^2 \rangle) = \frac{m_e}{2} \left(2 \left(\frac{e E \tau}{m_e} \right)^2 + \langle v_0(x - d) \rangle^2 - \langle v_0(x) \rangle^2 \right)$$

$$Q = \frac{m_e}{2} (\langle v_1^2 \rangle - \langle v_0^2 \rangle) = \frac{m_e}{2} \left(2 \left(\frac{e E \tau}{m_e} \right)^2 + \langle v_0(x - d) \rangle^2 - \langle v_0(x) \rangle^2 \right). \quad (23)$$

Полученное выражение можно привести к виду

$$\langle v_0(x-d) \rangle^2 - \langle v_0(x) \rangle^2 = -\frac{\Delta \langle v_0(x) \rangle^2}{\Delta x} \langle d \rangle = -\frac{3k}{m_e} \frac{\Delta T}{\Delta x} \langle v_{0x} t + \frac{eEt^2}{2m_e} \rangle = -\frac{3keE\tau^2 \Delta T}{m_e^2 \Delta x}$$

$$\langle v_0(x-d) \rangle^2 - \langle v_0(x) \rangle^2 = -\frac{\Delta \langle v_0(x) \rangle^2}{\Delta x} \langle d \rangle = -\frac{3k}{m_e} \frac{\Delta T}{\Delta x} \langle v_{0x} t + \frac{eEt^2}{2m_e} \rangle = -\frac{3keE\tau^2 \Delta T}{m_e^2 \Delta x}, \quad (24)$$

Откуда следует, что

$$p = \frac{(eE\tau)^2}{m_e} - \frac{3keE\tau^2 \Delta T}{2m_e \Delta x}$$

$$p = \frac{(eE\tau)^2}{m_e} - \frac{3keE\tau^2 \Delta T}{2m_e \Delta x}. \quad (25)$$

Численное значение дает

$$p = -\frac{3nkeE\tau \Delta T}{2m_e \Delta x} = -\frac{3nkeE\tau}{2m_e} \lambda = 7,71 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3}$$

$$p = -\frac{3nkeE\tau \Delta T}{2m_e \Delta x} = -\frac{3nkeE\tau}{2m_e} \lambda = 7,71 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3}. \quad (26)$$

4.3. Из формулы (25) следует, что мощность дополнительной теплоты Томсона пропорциональна плотности тока и градиенту температур, причем коэффициент пропорциональности равен

$$\mu = -\frac{3k}{2e}. \quad (27)$$

$$\mu = -\frac{3k}{2e}$$