

Условие

Задача 11 – 3. Равновесие и устойчивость звёзд.

В данной задаче рассматривается весьма упрощенная модель строения звезды, которая, тем не менее, позволяет оценить ее устойчивость.

Звезда в обычном состоянии представляет собой газовый шар, находящийся в гидродинамическом и тепловом равновесии. Гидродинамическое равновесие обеспечивается равенством сил тяготения и сил давления, действующих на каждый элемент массы звезды. Тепловое равновесие означает равенство энергии, выделяемой в недрах звезды, и энергии, излучаемой с поверхности звезды.

Для оценок рассматривайте сферическую звезду массы M и радиуса R , состоящую из полностью ионизированного водорода. Везде, где не сказано иное, считайте, что для вещества звезды выполняется уравнение состояния идеального газа. Считайте, что источником энергии звезды являются ядерные реакции, идущие в ядре звезды в области массы $0,1M$ с максимальным выделением энергии на единицу массы μc^2 , где $\mu = 0,01$.

Вам могут понадобиться значения следующих величин:

гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$

скорость света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$

газовая постоянная $R_G = 8,31 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$

постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$

постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$

масса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$

радиус Солнца $R_\odot = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$

скорость света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ универсальная газовая постоянная $R_G = 8,31 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$
постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$ постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$ масса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ радиус Солнца $R_\odot = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$

температура поверхности Солнца $T_\odot = 5,7 \cdot 10^3 \text{ К}$

температура поверхности Солнца $T_\odot = 5,7 \cdot 10^3 \text{ К}$

Кроме того, вам могут понадобиться следующие сведения: - тело при температуре T излучает с мощностью на единицу площади, равной $P = \sigma T^4$; - в результате ядерных реакций в ядре звезды образуются более тяжёлые элементы из более лёгких; чем тяжелее элемент, тем большая температура требуется для синтеза из этого элемента;

Для численных оценок параметров звезды используйте значения радиуса, массы и температуры поверхности для Солнца. Давлением излучения пренебрегайте.

Часть 1. Характеристики звезды.

1.1 Оцените среднюю плотность звезды $\bar{\rho}$. 1.2 Оцените давление в недрах звезды $\bar{P}$, считая плотность звезды постоянной. 1.3 Оцените температуру в центре звезды $\bar{T}$.

В дальнейшем, где не оговорено иное, считайте, что звезда имеет постоянную плотность и температуру, равную полученным значениям.

Часть 1. Характерное время процессов в звёздах.

1.1 Оцените гидродинамическое время звезды t_H , то есть время, за которое элементы вещества звезды сместятся на расстояние порядка 10% радиуса звезды под действием силы тяготения при отсутствии остальных сил. 1.2 Оцените тепловое время звезды t_T , то есть

время, требуемое для того, чтобы излучить 10% тепловой энергии звезды при отсутствии дополнительных источников энергии.

1.3 Оцените ядерное время звезды t_N , то есть время, требуемое, чтобы излучить 10% энергии, выделяющихся в звезде в результате ядерных реакций. Сравните величины характерных времён процессов в звезде и сделайте вывод о протекании процессов в звезде.

Часть 2. Анализ равновесия звёзд

В этой части считайте, что внутренняя энергия звездного вещества определяется по формуле

$$\varepsilon = K(T)\rho^{\gamma-1} + L(T), \quad (1)$$

где ε — внутренняя энергия, приходящаяся на единицу массы, K и L — некоторые функции, зависящие только от температуры и не зависящие от ее плотности, γ — характеристика вещества, называемая показатель адиабаты. В данной части задачи массу звезды считайте постоянной.

2.1 Существенную роль в эволюции звезд играет ее гравитационная энергия. Как зависит гравитационная энергия однородной звезды от ее массы M и радиуса R .

2.2 Определите вид зависимости полной энергии звезды E от её массы, радиуса и показателя адиабаты. Постройте схематические графики зависимости полной энергии звезды массы M от ее радиуса при различных значениях показателя адиабаты γ . Выберите такие значения этого показателя, при которых вид исследуемой зависимости претерпевает качественные изменения.

2.3 Установите, при каких значениях γ равновесие звезды устойчиво, а при каких неустойчиво.

Из трех рассматриваемых параметров звезды (масса M , радиус R и плотность ρ) независимыми являются только два, эти два параметра могут быть выбраны произвольно. Для дальнейшего рассмотрения в качестве независимых параметров удобно выбрать массу и плотность.

2.4 Определите вид зависимости массы звезды от её плотности $M(\rho)$ в состоянии равновесия. 2.5 Сформулируйте, какому условию должна удовлетворять зависимость $M(\rho)$, чтобы равновесие звезды было устойчиво.