

Условие

Задача 11 – 3. Равновесие и устойчивость звёзд.

В данной задаче рассматривается весьма упрощенная модель строения звезды, которая, тем не менее, позволяет оценить ее устойчивость.

Звезда в обычном состоянии представляет собой газовый шар, находящийся в гидродинамическом и тепловом равновесии. Гидродинамическое равновесие обеспечивается равенством сил тяготения и сил давления, действующих на каждый элемент массы звезды. Тепловое равновесие означает равенство энергии, выделяемой в недрах звезды, и энергии, излучаемой с поверхности звезды.

Для оценок рассматривайте сферическую звезду массы M и радиуса R , состоящую из полностью ионизированного водорода. Везде, где не сказано иное, считайте, что для вещества звезды выполняется уравнение состояния идеального газа. Считайте, что источником энергии звезды являются ядерные реакции, идущие в ядре звезды в области массы $0,1M$ с максимальным выделением энергии на единицу массы μc^2 , где $\mu = 0,01$.

Вам могут понадобиться значения следующих величин:

гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$

скорость света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$

газовая постоянная $R_G = 8,31 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$

постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$

постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$

масса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$

радиус Солнца $R_\odot = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$

скорость света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ универсальная газовая постоянная $R_G = 8,31 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$
постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$ постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$
масса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ радиус Солнца $R_\odot = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$

температура поверхности Солнца $T_\odot = 5,7 \cdot 10^3 \text{ К}$

температура поверхности Солнца $T_\odot = 5,7 \cdot 10^3 \text{ К}$

Кроме того, вам могут понадобиться следующие сведения: - тело при температуре T излучает с мощностью на единицу площади, равной $P = \sigma T^4$; - в результате ядерных реакций в ядре звезды образуются более тяжёлые элементы из более лёгких; чем тяжелее элемент, тем большая температура требуется для синтеза из этого элемента;

Для численных оценок параметров звезды используйте значения радиуса, массы и температуры поверхности для Солнца. Давлением излучения пренебрегайте.

Часть 1. Характеристики звезды.

1.1 Оцените среднюю плотность звезды $\bar{\rho}$. 1.2 Оцените давление в недрах звезды $\bar{P}$, считая плотность звезды постоянной. 1.3 Оцените температуру в центре звезды $\bar{T}$.

В дальнейшем, где не оговорено иное, считайте, что звезда имеет постоянную плотность и температуру, равную полученным значениям.

Часть 1. Характерное время процессов в звёздах.

1.1 Оцените гидродинамическое время звезды t_H , то есть время, за которое элементы вещества звезды сместятся на расстояние порядка 10% радиуса звезды под действием силы тяготения при отсутствии остальных сил. 1.2 Оцените тепловое время звезды t_T , то есть

время, требуемое для того, чтобы излучить 10% тепловой энергии звезды при отсутствии дополнительных источников энергии.

1.3 Оцените ядерное время звезды t_N , то есть время, требуемое, чтобы излучить 10% энергии, выделяющихся в звезде в результате ядерных реакций. Сравните величины характерных времён процессов в звезде и сделайте вывод о протекании процессов в звезде.

Часть 2. Анализ равновесия звёзд

В этой части считайте, что внутренняя энергия звездного вещества определяется по формуле

$$\varepsilon = K(T)\rho^{\gamma-1} + L(T), \quad (1)$$

где ε — внутренняя энергия, приходящаяся на единицу массы, K и L — некоторые функции, зависящие только от температуры и не зависящие от ее плотности, γ — характеристика вещества, называемая показатель адиабаты. В данной части задачи массу звезды считайте постоянной.

2.1 Существенную роль в эволюции звезд играет ее гравитационная энергия. Как зависит гравитационная энергия однородной звезды от ее массы M и радиуса R .

2.2 Определите вид зависимости полной энергии звезды E от её массы, радиуса и показателя адиабаты. Постройте схематические графики зависимости полной энергии звезды массы M от ее радиуса при различных значениях показателя адиабаты γ . Выберите такие значения этого показателя, при которых вид исследуемой зависимости претерпевает качественные изменения.

2.3 Установите, при каких значениях γ равновесие звезды устойчиво, а при каких неустойчиво.

Из трех рассматриваемых параметров звезды (масса M , радиус R и плотность ρ) независимыми являются только два, эти два параметра могут быть выбраны произвольно. Для дальнейшего рассмотрения в качестве независимых параметров удобно выбрать массу и плотность.

2.4 Определите вид зависимости массы звезды от её плотности $M(\rho)$ в состоянии равновесия. 2.5 Сформулируйте, какому условию должна удовлетворять зависимость $M(\rho)$, чтобы равновесие звезды было устойчиво.

Решение

Задача 11 - 3 Равновесие и устойчивость звёзд.

1.1 Средняя плотность звезды рассчитывается «по определению»

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} \approx 1 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (1)$$

1.2 Так как плотность звезды предлагается считать постоянной, то изменение давления при изменении расстояния до центра звезды на величину Δr описывается «гидростатической» формулой

$$\Delta P = -\rho g \Delta r. \quad (2)$$

Так как ускорение свободного падения зависит от расстояния до центра по закону

$$g(r) = g_0 \frac{r}{R}, \quad (3)$$

где $g_0 = G \frac{M}{R^2}$ - ускорение на поверхности звезды, то уравнение (2) приобретает вид

$$\Delta P = -\frac{\rho g_0}{R} r \Delta r. \quad (4)$$

Проводя суммирование по тонким сферическим слоям и, учитывая, что на поверхности давление равно нулю, получим

$$P_0 - \frac{\rho g_0}{R} \frac{R^2}{2} = 0 \quad (5)$$

Откуда следует, что давление в центре звезды оценивается по формуле

$$P_0 = \frac{\rho g_0}{R} \frac{R^2}{2} = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} \approx 1 \cdot 10^{14} \text{Па} \quad (5)$$

1.3 Для оценки температуры можно воспользоваться уравнением состояния идеального газа (с учетом, что молярная масса газа равна $\mu = m_p N_A$)

$$P_0 = \frac{\rho}{m_p N_A} R_G T \Rightarrow \bar{T} = P_0 \frac{m_p}{\rho k} = \frac{\rho g_0 R}{2} \frac{m_p}{\rho k} = \frac{m_p}{2k} G \frac{M}{R} \approx 1 \cdot 10^7 \text{К}. \quad (6)$$

1.1 Для оценки будем считать, что ускорение свободного падения в мало изменяется при погружении на 10% радиуса и равно ускорению свободного падения на поверхности. Тогда из закона равноускоренного движения можно получить искомую оценку времени падения

$$0,1R = \frac{g_0 t_H^2}{2} \Rightarrow t_H = \sqrt{\frac{0,2R^3}{GM}} \approx 8 \cdot 10^2 \text{с} \quad (7)$$

1.2 Тепловая энергия звезды оценивается по формуле

$$W_E = \frac{3}{2} kT \cdot 2 \frac{M}{m_p} = 3 \frac{M}{m_p} kT \approx 6 \cdot 10^{41} \text{Дж}, \quad (8)$$

Здесь учтено, что электроны имеют такую же энергию, как и протоны. В единицу времени звезда излучает с поверхности энергию, равную

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_s^4 \approx 4 \cdot 10^{26} \text{Вт}. \quad (9)$$

Тогда оценка теплового времени дается формулой

$$t_T = 0,1 \frac{W_T}{L} \approx 1,5 \cdot 10^{14} \text{с} \approx 5 \cdot 10^6 \text{лет}. \quad (10)$$

1.3 Ядерное время звезды t_N оценивается аналогично. Ядерная энергия, выделяющаяся в результате ядерных реакций равна

$$W_N = 0,1 M \beta c^2 \approx 2 \cdot 10^{44} \text{Дж} \quad (11)$$

Поэтому

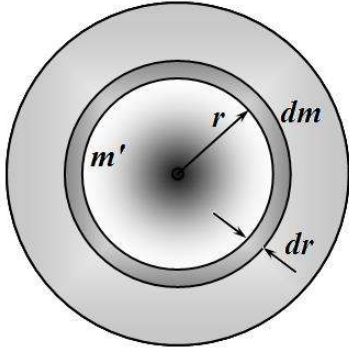
$$t_N = 0,1 \frac{W_N}{L} \approx 5 \cdot 10^{16} \text{с} \approx 2 \cdot 10^9 \text{лет}. \quad (12)$$

Часть 2. Анализ равновесия звёзд

2.1 В данном случае нет необходимости находить полную формулу для гравитационной энергии, достаточно только определить вид зависимости, который проще всего найти с помощью метода размерностей. Простой анализ показывает, что искомая зависимость должна иметь вид

$$W_G = -\alpha G \frac{M^2}{R}, \quad (13)$$

Где α - безразмерный коэффициент. Так как гравитационная энергия есть энергия притяжения, то она является отрицательной.



Примечание. При необходимости можно рассчитать и точное численное значение этого коэффициента. Для этого выделим внутри однородного шара тонкий сферический слой радиуса r и толщиной dr . Гравитационная энергия взаимодействия этого слоя с шаром определяется по формуле

$$W_G = -G \frac{m' dm}{r}.$$

где $m' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = M \frac{r^3}{R^3}$ - масса части шара, находящейся под рассматриваемым слоем, $dm = 4\pi r^2 dr \rho = 3M \frac{r^2 dr}{R^3}$ - масса выделенного слоя. Подставим эти значения в формулу для гравитационной энергии и проведем элементарное интегрирование по всем слоям, в результате получим

$$W_G = - \int_0^R G \frac{m' dm}{r} = -3GM^2 \int_0^R \frac{r^3}{R^3} \frac{r^2 dr}{R^3} \frac{1}{r} = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}.$$

2.2 Полная энергия звезды состоит из ее внутренней энергии, определяемой формулой (1), приведенной в условии задачи, и гравитационной энергией, найденной в предыдущем пункте:

$$W = M\varepsilon + W_G = M \left(K(T) \rho^{\gamma-1} + L(T) \right) - \alpha G \frac{M^2}{R}, \quad (14)$$

Теперь необходимо выразить плотность звезды через ее массу и радиус:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (15)$$

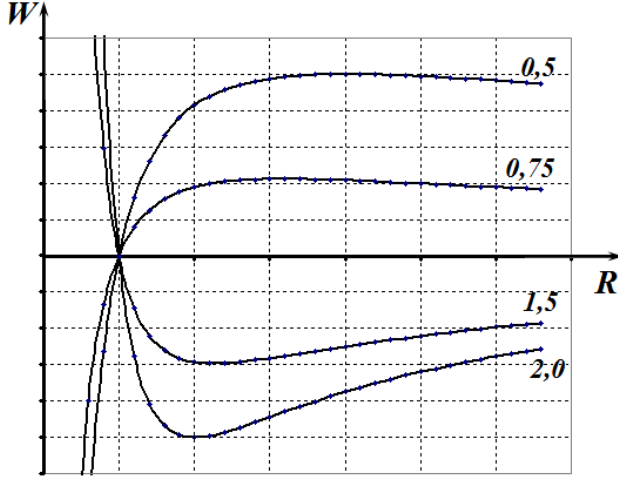
Окончательное выражение для энергии принимает вид

$$\begin{aligned} W = M\varepsilon + W_G &= M \left(K(T) \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right)^{\gamma-1} + L(T) \right) - \alpha G \frac{M^2}{R} = \\ &= A \frac{M^\gamma}{R^{3\gamma-3}} - B \frac{M^2}{R} + C \end{aligned} \quad (16)$$

где A, B, C - некоторые положительные величины, не зависящие от массы и радиуса планеты, причем последнее постоянное слагаемое может быть опущено.

Схематический вид зависимости $W(R)$ легко установить, рассматривая поведение функции в предельных случаях $R \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$. Простой анализ показывает, что при $3\gamma - 3 > 1$ данная функция имеет точку минимума, в противном случае она имеет точку максимума.

Для примера на рисунке показаны графики функции $W = \frac{1}{R^\alpha} - \frac{1}{R}$, при различных значениях показателя степени α , которые приведены на рисунке.



2.3 Чтобы положения равновесия (ему соответствуют точки экстремума энергии) было устойчивым необходимо, чтобы функция имела минимум энергии. В нашем случае, как это следует из анализа зависимости $W(R)$, это условие достигается при

$$3\gamma - 3 > 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma > \frac{4}{3}. \quad (17)$$

2.4 Чтобы получить зависимость массы звезды от ее плотности (помните, что радиус звезды не является постоянным!) достаточно выразить ее радиус

$$R = \sqrt[3]{\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho}} = \beta M^{\frac{1}{3}} \rho^{-\frac{1}{3}} \quad (18)$$

И подставить его в выражение для полной энергии (16)

$$W = A \frac{M^\gamma}{R^{3\gamma-3}} - B \frac{M^2}{R} = A' M \rho^{\gamma-1} - B' M^{\frac{5}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}, \quad (19)$$

2.5 Условие устойчивого равновесия и в этом варианте может быть сформулировано аналогично – функция $W(\rho)$ должна иметь точку минимума.