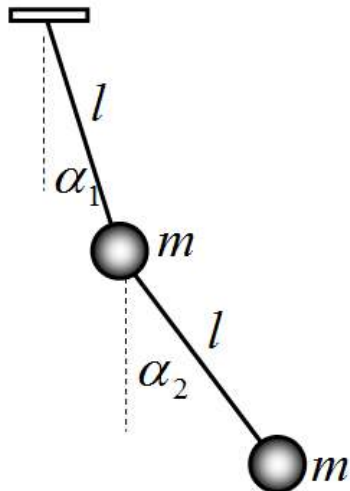


Условие

Задача 11-1 Двойной маятник.

Приборы и оборудование: двойной маятник, маятник с тяжелым грузом, система подвеса маятников, линейки измерительные.

В курсе физики вы изучали различные колебательные системы, все они имели только одну степень свободы. Достаточно часто встречаются колебательные системы имеющие несколько степеней свободы. Важным примером таких систем являются молекулы, спектральное изучение частот и амплитуд их собственных колебаний дает важную информацию об их строении.



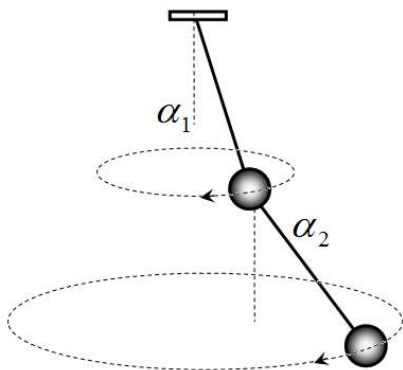
В данном задании вам предстоит исследовать простейшую колебательную систему, имеющую две степени свободы – двойной маятник. Двойной маятник представляет собой два одинаковых пластилиновых шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины. Шары должны колебаться в одной вертикальной плоскости. Координатами, описывающими движения маятника, являются углы отклонения нитей от вертикали α_1, α_2 .

Если отклонить маятники нити маятников на произвольные углы, то шарики начнут совершать достаточно сложные колебания. Однако при определенных соотношениях между углами отклонения колебания маятников являются устойчивыми и сохраняющими свою форму. Такие колебания называются нормальными (их еще называют модами колебаний). Нахождение типов собственных колебаний и их частот является достаточно сложной математической задачей.

Часть 1. Теоретическая.

1.1 Рассчитайте частоты собственных колебаний и соответствующие отношения амплитуд отклонений маятников для рассматриваемой системы.

Подсказка. Воспользуйтесь аналогией между движением обычного математического маятника в одной плоскости и его круговым движением, при котором угол отклонения нити остается неизменным. При малых углах отклонения периоды таких движений совпадают! Аналогично плоское движение двойного маятника имеет те же частоты и то же отношение амплитуд, что и их вращательное движение.



Часть 2. Экспериментальная.

Для экспериментального нахождения мод колебаний удобно использовать явление резонанса. Для исследования резонанса необходимо уметь создавать периодическое возмущение с изменяемой частотой. Для реализации этой идеи используется обычный математический маятник с массивным грузом. Оба маятника подвешиваются на одну горизонтальную нить. Раскачивающийся массивный маятник (длину которого можно изменять) заставляет колебаться горизонтальную нить, к которой подвешены оба маятника. Колебания этой нити создают вынуждающую силу для легкого двойного маятника. Можно считать, что колебания этого легкого маятника практически не влияют на колебания массивного маятника.

2.1 Экспериментально исследуйте зависимость амплитуд вынужденных колебаний двух грузиков A_1, A_2 двойного маятника от длины массивного маятника L .

2.2 Постройте графики полученных зависимостей.

Рекомендуемый шаг изменения длины маятника* $\Delta L = 5$ см. При необходимости, изменение длины массивного маятника можно уменьшить до 1 см (0,5 см). Начало измерений производить при длине $l_0 = 70$ см. $L = 70$ см. Высота отклонения массивного груза не должна превышать 1 с и оставаться примерно постоянной.*

2.2 Используя полученные зависимости, определите частоты нормальных колебаний ω_1, ω_2 двойного маятника и отношение амплитуд отклонений шариков при этих колебаниях.

2.3 Изобразите схематически, как движется двойной маятник при нормальных колебаниях.

2.4 Сравните результаты теоретических расчетов и результатов измерений. Укажите возможные причины их расхождений.

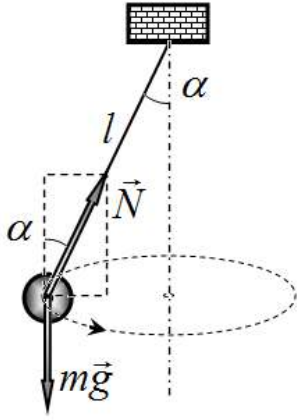
Решение

Задача 11-1 Двойной маятник.

Часть 1. Теоретическая.

1.1 Покажем, что приведенная в условии подсказка «работает». На рис. изображены силы, действующие на небольшое тело, подвешенное на нити и вращающееся по горизонтальной окружности с постоянной угловой скоростью ω . Запишем уравнения второго закона Ньютона для данного тела в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} m\omega^2 l \sin \alpha = N \sin \alpha \\ mg = N \cos \alpha \end{cases} \quad (1)$$



Из этих уравнений следует, что угловая скорость такого устойчивого вращения равна

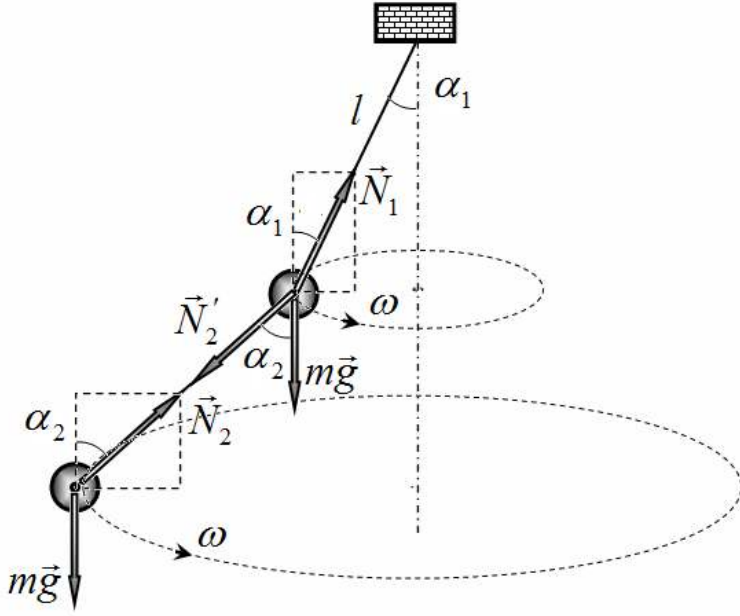
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}. \quad (2)$$

При малых отклонениях $\cos \alpha \approx 1$, поэтому период вращения оказывается равным

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (3)$$

Что совпадает с периодом колебаний математического маятника. Аналогично рассмотрим движение двойного маятника, рассматриваемого в данной задаче. Найдем при каких частотах вращения грузы могут вращаться по горизонтальным окружностям. На рис. изображены силы, действующие на грузы двойного маятника. Уравнения второго закона Ньютона для первого (верхнего) и второго грузов в данном случае имеют вид:

$$\begin{cases} m\omega^2 l \sin \alpha_1 = N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2 \\ mg = N_1 \cos \alpha_1 - N_2 \cos \alpha_2 \\ m\omega^2 (l \sin \alpha_1 + l \sin \alpha_2) = N_2 \sin \alpha_2 \\ mg = N_2 \cos \alpha_2 \end{cases} \quad (4)$$



Считая углы отклонения малыми, положим $\cos \alpha_1 \approx 1$, $\cos \alpha_2 \approx 1$, $\sin \alpha_1 \approx \alpha_1$, $\sin \alpha_2 \approx \alpha_2$. В этом приближении следует, что

$$\begin{aligned} N_2 &= mg \\ N_1 &= 2mg \end{aligned}$$

Избавляясь от сил натяжения нитей, получим систему уравнений

$$\begin{cases} m\omega^2 l \alpha_1 = 2mg \alpha_1 - mg \alpha_2 \\ m\omega^2 l (\alpha_1 + \alpha_2) = mg \alpha_2 \end{cases}, \quad (5)$$

Для упрощения дальнейшего анализа обозначим круговую частоту одинарного маятника $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \alpha_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \alpha_1 - \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \alpha_2 = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Полученная система является необычной, по крайней мере, для школьников. Во-первых, она имеет очевидное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, которое интереса не представляет; во-вторых, из каждого из этих уравнений можно выразить только отношение углов отклонений:

- из первого: $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$.
- из второго $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}$.

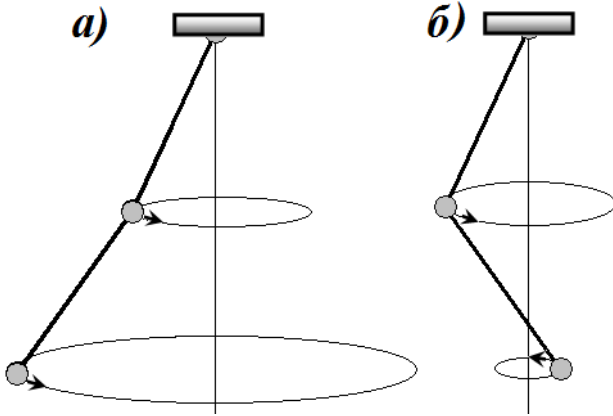
Чтобы система уравнений (6) была совместна, эти отношения должны быть равны, что возможно при выполнении условия

$$2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}. \quad (7)$$

Это выражение представляет собой квадратное уравнение относительно величины $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, решением которого являются

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \pm \sqrt{2} \quad (8)$$

Полученный результат означает, что устойчивое вращение в горизонтальных плоскостях возможно только при этих частотах вращения! Причем каждому из этих значений соответствует строго определенное отношение углов отклонений.

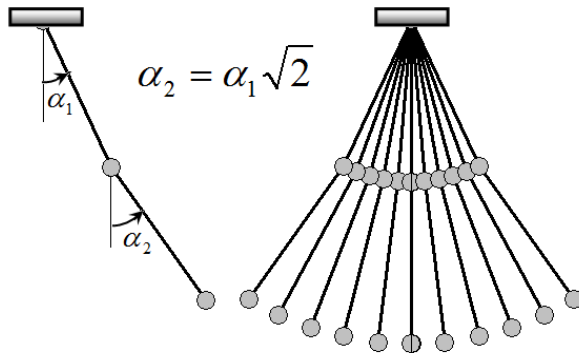


При $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ оно равно $\alpha_2 = \alpha_1 \sqrt{2}$. В этом случае отклонения нитей направлены в одну сторону – симметричное вращение. (рис. а).

При $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ отношение углов равно $\alpha_2 = -\alpha_1 \sqrt{2}$, то есть нити отклонены в противоположные стороны – антисимметричное вращение (рис б).

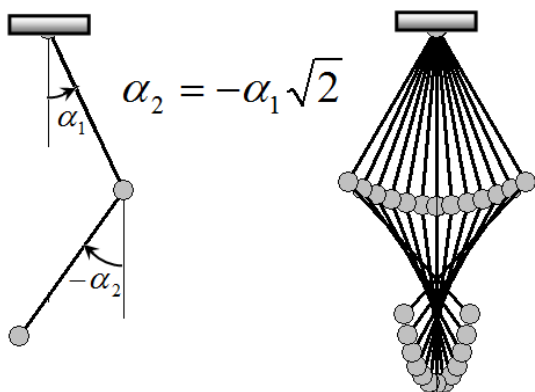
Аналогичными будут и характеристики движения двойного маятника: возможны два типа собственных колебаний (их еще называют модами колебаний).

Первый тип – симметричные колебания (рис.)



Их частота определяется формулой $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, при этом отношение амплитуд колебаний равно $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{2}$, отклонения направлены в одну сторону.

Второй тип – антисимметричные колебания с большой частотой $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ и отклонением нитей в противоположные стороны с тем же отношением амплитуд $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\sqrt{2}$. Вид этих колебаний показан на рис.

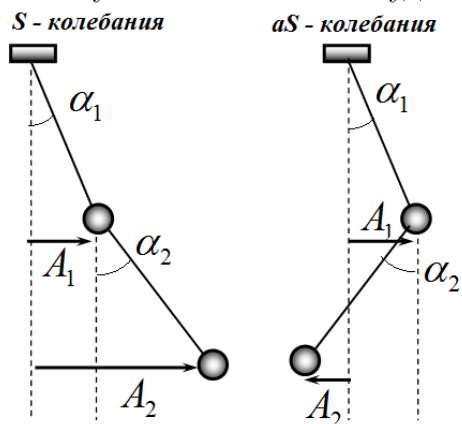


Отношение частот этих колебаний равно

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2}. \quad (9)$$

Часть 2. Экспериментальная.

2.1 Результаты измерений зависимости амплитуды колебаний A_1 (верхнего маятника) и A_2 (нижнего маятника) от длины тяжелого маятника l приведены в Таблице 1. Отметим, что значения амплитуд приведены в миллиметрах, измеренных по соответствующим линейкам. На рисунке показаны, какие отклонения измерялись при симметричных (S) и антисимметричных (aS) колебаниях. При малых углах эти величины пропорциональны углам отклонений, поэтому отношения амплитуд не зависят от единиц измерения.



Укажем необходимые моменты методики проведения измерений.

При фиксировании значений амплитуд A_1 и A_2 необходимо дождаться, когда энергия, поступающая извне, сравняется с энергией потерь (увеличение отклонения грузиков прекращается). При резонансных частотах это время Δt составляет несколько секунд.

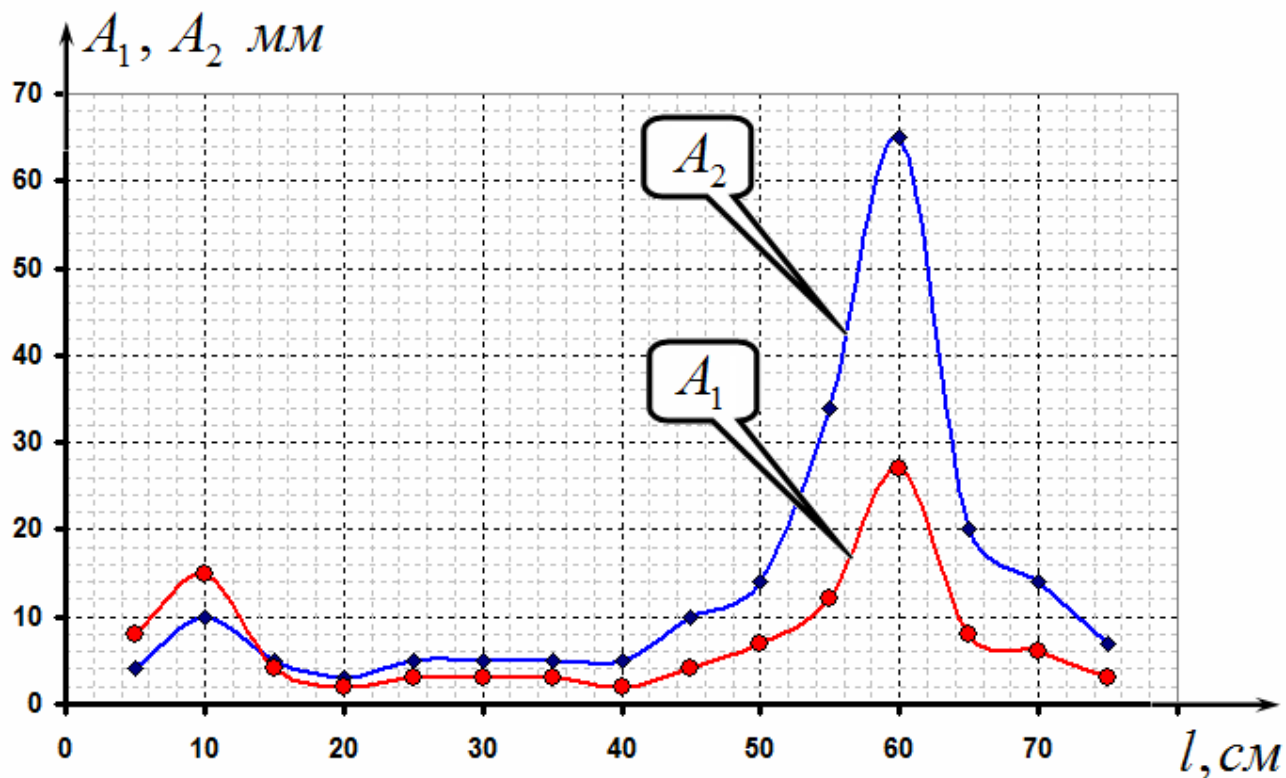
Для достижения притока постоянной энергии со стороны внешнего воздействия на систему, необходимо следить, чтобы массивный грузик отклонялся на одинаковую высоту $\Delta h = 1 \text{ см}$. Таким образом, для чистоты эксперимента необходимо контролировать *не* амплитуду отклонения маятника переменной длины, а *высоту* его поднятия!

Таблица 1.

$l, \text{ см}$	75	70	65	60	55	50	45	40
$A_2, \text{ мм}$	7	14	20	65	34	14	10	5
$A_1, \text{ мм}$	3	6	8	27	12	7	4	2
$l, \text{ см}$	35	30	25	20	15	10	5	
$A_2, \text{ мм}$	5	5	5	3	5	10	4	
$A_1, \text{ мм}$	3	3	3	2	4	15	8	

Графики полученной зависимости показаны на следующем рисунке.

$A_1, A_2 \text{ мм}$



Полученные зависимости наглядно показывают наличие двух резонансов. Для уточнения положения максимумов и их значений следует провести дополнительные измерения в области обнаруженных максимумов. Результаты этих измерений приведены в Таблицах 2 и 3.

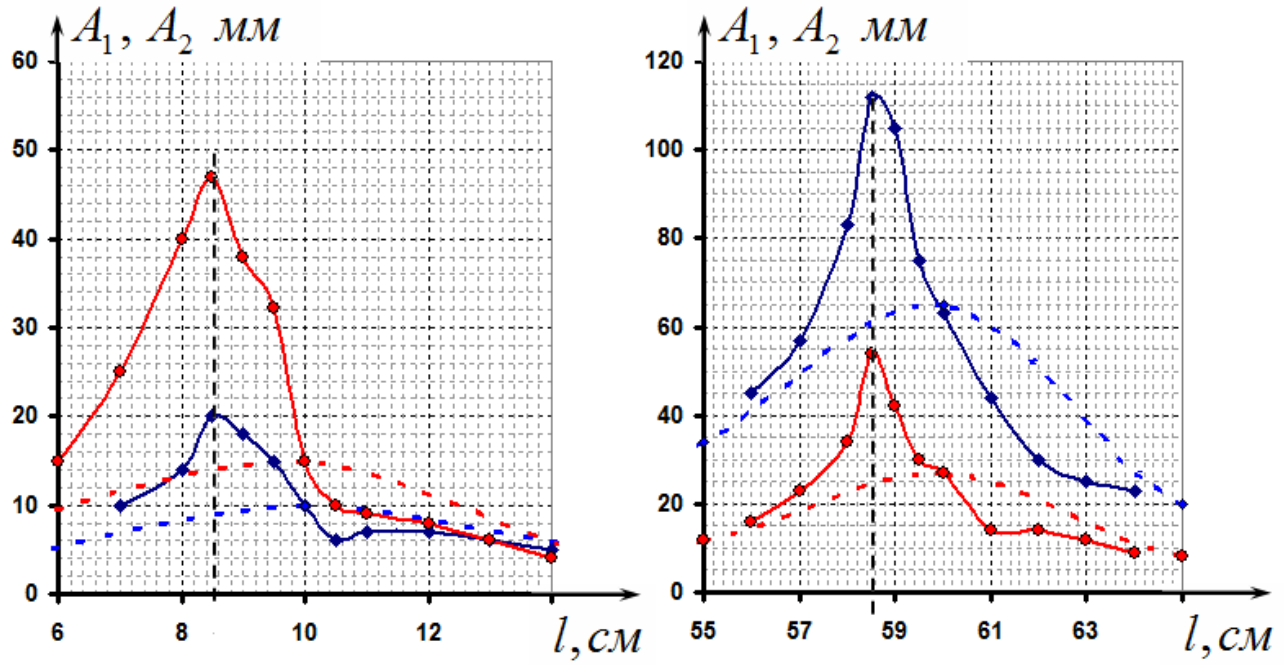
Таблица 2.

$l, \text{ см}$	64	63	62	61	60	59,5	59	58,5	58	57	56
$A_2, \text{ мм}$	23	25	30	44	63	75	105	112	83	57	45
$A_1, \text{ мм}$	9	12	14	14	27	30	42	54	34	23	16

Таблица 3.

$l, \text{ см}$	14	13	12	11	10,5	10	9,5	9	8,5	8	7	6
$A_2, \text{ мм}$	5	6	7	7	6	10	15	18	20	14	10	8
$A_1, \text{ мм}$	4	6	8	9	10	15	32,3	38	47	40	25	15

Графики этих уточненных зависимостей показаны на рисунках. Для сравнения показаны участки, построенные по данным таблицы 1.



По этим данным можно определить, что резонанс для симметричных колебаний наступает при длине тяжелого маятника (являющегося источником вынуждающей силы) равном $l_S = 58,6$ см, а для антисимметричных колебаний при $l_{aS} = 8,5$ см. Частоты этих колебаний можно рассчитать по известной формуле для математического маятника

$$\begin{aligned}\omega_S &= \sqrt{\frac{g}{l_S}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,586}} \approx 4,1 \text{ c}^{-1} \\ \omega_{aS} &= \sqrt{\frac{g}{l_{aS}}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,085}} \approx 10,7 \text{ c}^{-1}\end{aligned}\quad (10)$$

Отношение этих частот приблизительно равно

$$\frac{\omega_{aS}}{\omega_S} \approx 2,6, \quad (11)$$

что достаточно близко к теоретическому значению

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4. \quad (12)$$

Для анализа отношения амплитуд следует перейти от измеренных линейных отклонений грузов к углам отклонения нитей. Для симметричных колебаний отношение углов отклонений (считая их малыми) рассчитывается по формуле

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{112 - 54}{54} \approx 1,1. \quad (13)$$

Для антисимметричных колебаний это отношение рассчитывается по другой формуле

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{A_2 + A_1}{A_1} = \frac{47 + 20}{47} \approx 1,4. \quad (14)$$

В теоретических расчетах ранее мы получили, что это отношение в обоих случаях должно быть равно $\sqrt{2} \approx 1,4$. Учитывая сложность проведения эксперимента, особенно в измерении отклонений соответствие между расчетными и измеренными данными можно признать вполне удовлетворительным.