

## шарниром

### Условие

#### Задача 10-1. Удержание и сдвиг

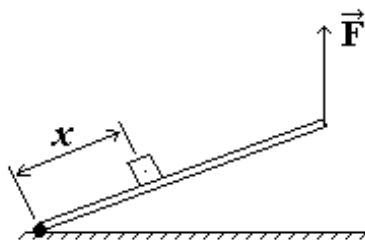
**Приборы и оборудование:** динамометры (2,5Н, 5,0Н, 10,0Н, синий зелёный и жёлтый из новых наборов по механике), дощечка деревянная с петлёй и «шарниром», три цилиндрических груза без крючков по 100г., брусок деревянный с прикреплённой петлёй из ниток, бумага для принтера (А4, 1 лист), мерная лента с миллиметровыми делениями, линейка ученическая (20 – 30см), штатив с лапкой, скотч.

$$g = 9,813 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

**Указания для участников олимпиады.** Ускорение свободного падения примите равным  $g = 9,813 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Проводите эксперимент и вычисления так, чтобы погрешности были как можно меньше. В соответствующих пунктах указывайте измерительные приборы, которыми Вы пользовались.

#### Часть 1. Удержание

В данной части задачи Вам предстоит исследовать зависимость силы, прилагаемой к одному из краёв дощечки, от расстояния между грузом на дощечке и точкой опоры (рис. 1). Используйте обозначения:  $m$  – масса грузов,  $M$  – масса дощечки,  $l$  – длина дощечки.

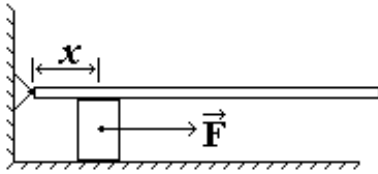


- 1.1. Получите зависимость  $F(x)$  теоретически.
- 1.2. Проверьте полученную Вами зависимость экспериментально. Кратко опишите (3 – 6 предложений) ход Вашего эксперимента (*сочинение более чем на страницу жюри не читает и не оценивает*).
- 1.3. Используя результаты эксперимента, вычислите массу  $m$  груза.
- 1.4. Рассчитайте абсолютную и относительную погрешность определения массы груза. Запишите значение массы груза с указанием погрешностей.

#### Часть 2. Сдвиг

В данной части задачи Вам предстоит исследовать зависимость силы, необходимой для сдвига бруска, от расстояния между шарнирной точкой крепления дощечки и линией опоры дощечки о брусок  $F(x)$  (рис. 2). Под нижнюю грань бруска положите лист бумаги для принтера. Если при смещении бруска лист так же будет смещаться, то придерживайте лист рукой или прикрепите его «легонько» скотчем. Считайте, что линия опоры дощечки о брусок проходит посередине верхней грани бруска. Старайтесь, чтобы в ходе всех измерений дощечка располагалась горизонтально. Шарнирное крепление означает, что дощечка должна поворачиваться относительно точки крепления.

- 2.1. Получите зависимость  $F(x)$  теоретически. Используйте следующие обозначения:  $m$  – масса бруска,  $M$  – масса доски,  $L$  – длина доски,  $\mu_1$  – коэффициент трения покоя между листом бумаги и бруском,  $\mu_2$  – коэффициент трения покоя между бруском и дощечкой



2.2. Измерьте массу бруска  $m$ , массу  $M$  и длину  $L$  доски.

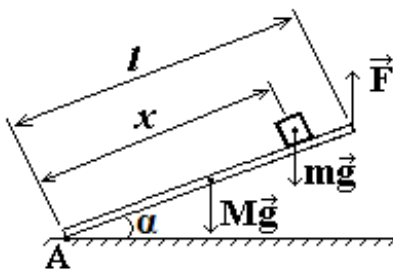
2.3. Проверьте полученную Вами зависимость экспериментально. Кратко опишите (3 – 4 предложения) как измеряли силу  $F$  и расстояние  $x$ .

2.4. Используя результаты эксперимента, вычислите коэффициенты трения покоя  $\mu_1$  – между листом бумаги и бруском и  $\mu_2$  – между бруском и дощечкой. Погрешности коэффициентов трения вычислять не требуется.

**Решение**

**Задача 10-1. Удержание и сдвиг**

**Часть 1. Удержание**



1.1. Обозначим силы, действующие на дощечку и грузы (рис.3). Запишем условие равновесия системы тел «дощечка – грузы» для моментов сил. (Сила реакции опоры и сила трения, действующие на дощечку со стороны поверхности стола в точке А на рисунке не показаны, так моменты этих сил относительно данной точки равны нулю).

$$Fl \cos \alpha = Mg \frac{l}{2} \cos \alpha + mgx \cos \alpha \quad (1).$$

Рисунок 3.

$$Fl \cos \alpha = Mg \frac{l}{2} \cos \alpha + mgx \cos \alpha. \quad (1)$$

Из (1) получаем

$$F = \frac{1}{2}Mg + \frac{mg}{l}x \quad (2).$$

$$F = \frac{1}{2}Mg + \frac{mg}{l}x. \quad (2)$$

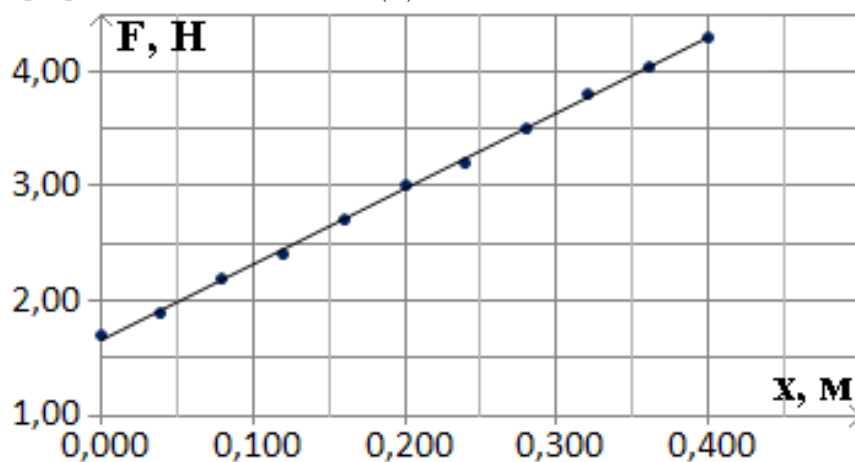
1.2. Изначально следует выбрать динамометр, которым будет измеряться сила  $F$ . Чтобы выполнить условие минимизации погрешности, следует выбрать динамометр с пределом измерения 5,0Н, так как данный динамометр будет задействован почти на всю шкалу. (Динамометром с пределом измерения 2,5Н нельзя будет выполнить измерения во всём диапазоне изменения величины  $x$ , а динамометр с пределом измерения 10,0Н будет задействован только на половину шкалы). Для более удобного и быстрого измерения величины  $x$  мерную ленту следует прикрепить скотчем вдоль поверхности доски. (Моментом силы тяжести, действующим на мерную ленту, по сравнению с моментами сил тяжести, действующими на дощечку и

грузы, можно пренебречь). Динамометр крепим в лапке штатива, дощечку с помощью петли цепляем за крючок динамометра. Угол наклона дощечки подбираем таким, чтобы грузы ни в одном положении не скользили по дощечке. Результаты эксперимента представлены в таблице 1 и графике 1.

Таблица 1.

| <b>x, м</b> | <b>F, Н</b> |
|-------------|-------------|
| 0,000       | 1,70        |
| 0,040       | 1,90        |
| 0,080       | 2,20        |
| 0,120       | 2,40        |
| 0,160       | 2,70        |
| 0,200       | 3,00        |
| 0,240       | 3,20        |
| 0,280       | 3,50        |
| 0,320       | 3,80        |
| 0,360       | 4,05        |
| 0,400       | 4,30        |

График 1. Зависимость  $F(x)$



Результаты эксперимента подтверждают линейную зависимость  $F(x)$ .

1.3. Зависимость  $F(x)$  имеет вид:

$$F = b + kx \quad (3).$$

$$F = b + kx. \quad (3)$$

$$b = \frac{1}{2}Mg \quad (4), \quad k = \frac{mg}{l} \quad (5).$$

Сравнивая (3) и (2) получим:

$$b = \frac{1}{2}Mg, \quad (4)$$

$$k = \frac{mg}{l}. \quad (5)$$

Значения коэффициентов  $b$  и  $k$  определим по графику зависимости  $F(x)$ :  $b$  – координата пересечения усредняющей прямой оси  $F$ ,  $k$  – тангенс угла наклона усредняющей прямой к оси  $x$ .

$$\langle b \rangle = 1,65 \text{ Н}, \quad \langle k \rangle = 6,61 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

$$\langle b \rangle = 1,65 \text{ Н}, \quad \langle k \rangle = 6,61 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

$$\langle m \rangle = \frac{\langle k \rangle \cdot \langle l \rangle}{\langle g \rangle} \quad (6).$$

ной лентой:  $l = (45,2 \pm 0,1) \text{ см}$ .

Из (5) получим:

$$\langle m \rangle = \frac{\langle k \rangle \cdot \langle l \rangle}{\langle g \rangle}. \quad (6)$$

Длину дощечки измеряем мерной лентой:  $l = (45,2 \pm 0,1) \text{ см}$ . Подставляя значения соответствующих величин в (6) получим:

$$\langle m \rangle = \frac{6,61 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 0,452 \text{ м}}{9,813 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 0,304 \text{ кг} = \mathbf{304 \text{ г}}.$$

$$\langle m \rangle = \frac{6,61 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 0,452 \text{ м}}{9,813 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \mathbf{0,304 \text{ кг} = 304 \text{ г}}.$$

1.4. Абсолютную и относительную погрешность определения массы груза  $m$  определим следующим образом:

$$\varepsilon_m = \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{\langle k \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{\langle l \rangle}\right)^2}, \quad (7)$$

$$\Delta m = \varepsilon_m \cdot \langle m \rangle. \quad (8)$$

$$\varepsilon_m = \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{\langle k \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{\langle l \rangle}\right)^2} \quad (7),$$

$$\Delta m = \varepsilon_m \cdot \langle m \rangle \quad (8).$$

погрешностью  $\varepsilon_g$  пренебрегаем, так как

Относительной погрешностью  $\varepsilon_g$  пренебрегаем, так как ускорение свободного падения задано с четырьмя значащими цифрами и относительная погрешность данной величины пренебрежимо мала по сравнению с относительными погрешностями величин  $k$  и  $l$ .

$\Delta l = 1 \text{ мм}$ .

Абсолютная погрешность измерения длины дощечки мерной лентой  $\Delta l = 1 \text{ мм}$ . Абсолютную погрешность коэффициента  $k$  определим простым графическим способом.

$$\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{6,67 \frac{\text{Н}}{\text{М}} - 6,50 \frac{\text{Н}}{\text{М}}}{2} = 0,085 \frac{\text{Н}}{\text{М}} \approx 0,09 \frac{\text{Н}}{\text{М}}.$$

$$\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{6,67 \frac{\text{Н}}{\text{М}} - 6,50 \frac{\text{Н}}{\text{М}}}{2} = 0,085 \frac{\text{Н}}{\text{М}} \approx 0,09 \frac{\text{Н}}{\text{М}}.$$

$$\varepsilon_m = \sqrt{\left(\frac{0,09 \frac{\text{Н}}{\text{М}}}{6,61 \frac{\text{Н}}{\text{М}}}\right)^2 + \left(\frac{1 \text{ мм}}{452 \text{ мм}}\right)^2} = 0,014 = 1,4\%,$$

$$\varepsilon_m = \sqrt{\left(\frac{0,09 \frac{\text{Н}}{\text{М}}}{6,61 \frac{\text{Н}}{\text{М}}}\right)^2 + \left(\frac{1 \text{ мм}}{452 \text{ мм}}\right)^2} = 0,014 = 1,4\%,$$

$$\Delta m = 0,014 \cdot 304 \text{ г} = 4 \text{ г}.$$

$$\Delta m = 0,014 \cdot 304 \text{ г} = 4 \text{ г}.$$

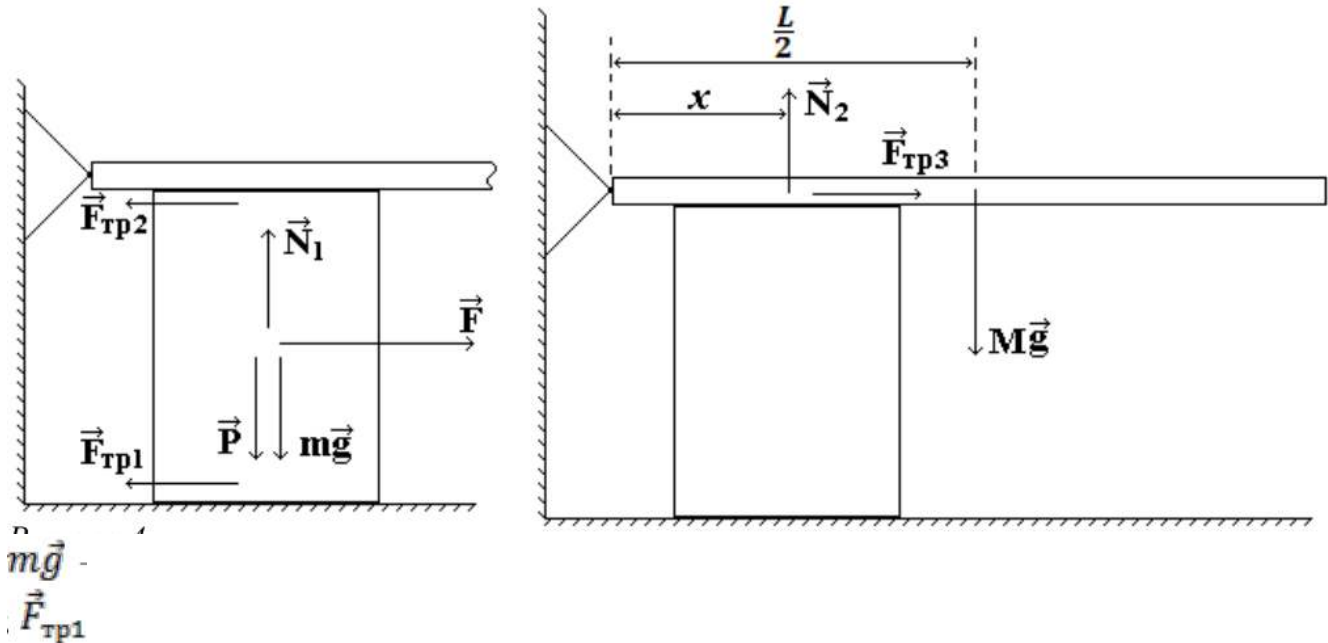
Окончательно

$$m = (\langle m \rangle \pm \Delta m) = (304 \pm 4) \text{ г}.$$

$$\mathbf{m} = (< m > \pm \Delta m) = (304 \pm 4) \text{ г}.$$

## Часть 2. Сдвиг

2.1. Обозначим силы, действующие на брусок (рис.4) и дощечку (рис.5).



Здесь:  $m\vec{g}$  – сила тяжести, действующая на брусок;  $\vec{P}$  – вес дощечки, действующий на брусок;  $\vec{F}_{\text{тр1}}$  – сила трения, действующая на брусок со стороны листа бумаги;  $\vec{F}_{\text{тр2}}$  – сила трения,

действующая на брусок со стороны дощечки;  $\vec{N}_1$  – сила нормальной реакции опоры, действующая на брусок со стороны стола;  $\vec{F}$  – сила, действующая на брусок со стороны динамометра;  $\vec{F}_{\text{тр}3}$  – сила трения, действующая на дощечку со стороны бруска;  $\vec{N}_2$  – сила нормальной реакции опоры, действующая на дощечку со стороны бруска;  $M\vec{g}$  – сила тяжести, действующая на дощечку.

Будем считать, что в момент сдвига выполняется условие:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{тр}1} + \vec{F}_{\text{тр}2} \quad (9),$$

$$F = F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}, \quad (9)$$

где

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 \quad (10), \quad F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 \quad (11).$$

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1, \quad (10)$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2. \quad (11)$$

$\vec{N}_2$  определим из правила моментов сил, действующих на дощечку:

$$N_2 x = Mg \frac{L}{2} \quad (12),$$

$$N_2 x = Mg \frac{L}{2}, \quad (12)$$

Моментом силы  $\vec{F}_{\text{тр}3}$  пренебрегаем, так как её плечо много меньше, чем плечи сил  $\vec{N}_2$  и  $M\vec{g}$ . Из (12) получим

$$N_2 = Mg \frac{L}{2x} \quad (13).$$

$$N_2 = Mg \frac{L}{2x}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (11), получим:

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 Mg \frac{L}{2x} \quad (14).$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 Mg \frac{L}{2x}. \quad (14)$$

Для  $\vec{N}_1$ ,  $\vec{P}$ , и  $m\vec{g}$  выполняется условие:

$$\vec{N}_1 = m\vec{g} + \vec{P} \quad (15).$$

$$N_1 = mg + P \quad (15)$$

По третьему закону Ньютона

$$\vec{P} = -\vec{N}_2 \quad (16).$$

$$P = N_2 \quad (16)$$

С учетом (13), получим:

$$N_1 = mg + Mg \frac{L}{2x} \quad (17).$$

$$N_1 = mg + Mg \frac{L}{2x} \quad (17)$$

Подставляя (17) в (10) получим:

$$F_{\text{тр1}} = \mu_1 mg + \mu_1 Mg \frac{L}{2x} \quad (18).$$

$$F_{\text{тр1}} = \mu_1 mg + \mu_1 Mg \frac{L}{2x} \quad (18)$$

Подставляя (18) и (14) в (9) после преобразований окончательно получим:

$$F = \mu_1 mg + \frac{(\mu_1 + \mu_2)MgL}{2} \cdot \frac{1}{x} \quad (19).$$

$$F = \mu_1 mg + \frac{(\mu_1 + \mu_2)MgL}{2} \cdot \frac{1}{x} \quad (19)$$

**2.2.** Массу бруска и доски измеряем на электронных весах. Длину доски измеряем мерной

лентой. Масса бруска  $m = (93,2 \pm 0,1)\text{г}$ ,

$L = (45,2 \pm 0,1)\text{см}$ .

Масса доски  $m = (93,2 \pm 0,1)\text{ г}$ , масса доски  $M = (343,1 \pm 0,1)\text{ г}$ , длина

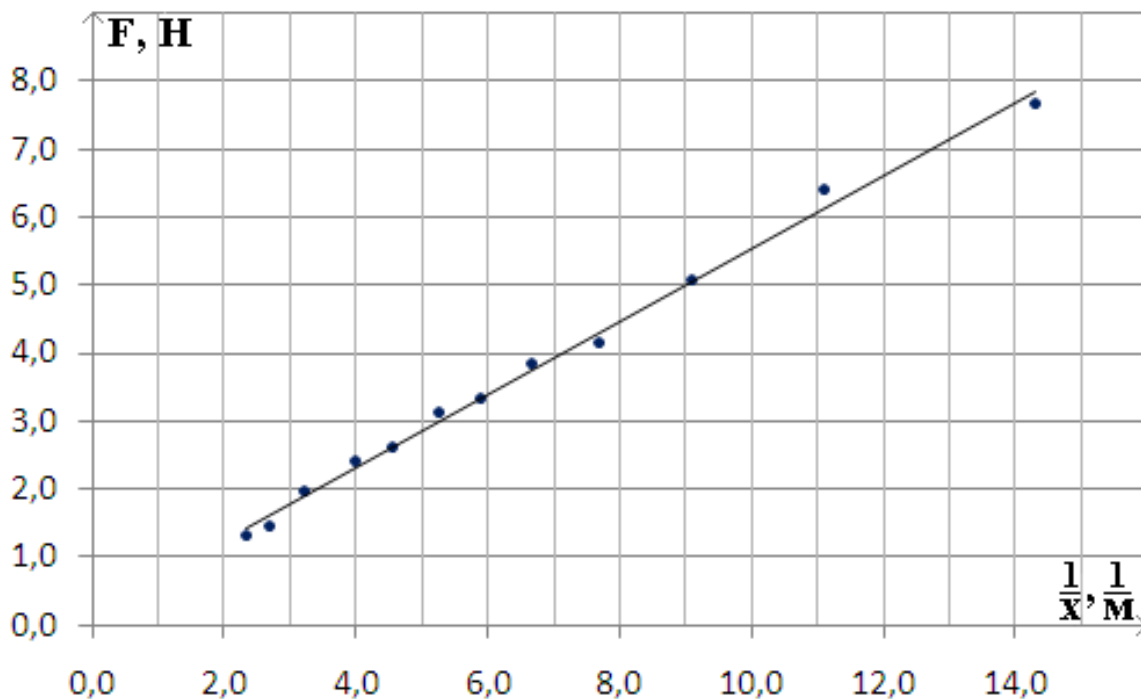
$M = (343,1 \pm 0,1)\text{г}$ ,

доски  $L = (45,2 \pm 0,1)\text{ см}$ .

**2.3.** Силу  $F$ , при малых значениях  $x$ , измеряем динамометром с пределом измерения 10,0 Н. С увеличением  $x$ , сила  $F$  уменьшается. Когда значения силы станут меньше 5,0 Н, используем динамометр с пределом измерения 5,0 Н, при значениях силы меньше 2,5 Н используем динамометр с пределом измерения 2,5 Н. Расстояние  $x$  измеряем мерной лентой. Для удобства измерения  $x$  мерную ленту крепим на верхней поверхности дощечки скотчем. Случайной погрешностью измерения силы  $F$  в данном эксперименте пренебрегать нельзя, поэтому для каждого значения  $x$  проводим пять повторных измерений силы  $F$ . Результаты эксперимента представлены в таблице 2.

Таблица 2. Экспериментальные данные зависимости  $F(x)$

| Повторные измерения силы $F$ , Н |       |       |       |       | $\langle F \rangle$ , Н | $X$ , м | $1/X$ , 1/м |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------------------------|---------|-------------|
| $F_1$                            | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ |                         |         |             |
| 7,6                              | 7,8   | 7,6   | 7,5   | 7,8   | 7,7                     | 0,070   | 14          |
| 6,8                              | 6,2   | 6,4   | 6,4   | 6,2   | 6,4                     | 0,090   | 11          |
| 5,3                              | 4,9   | 5,2   | 5,2   | 4,8   | 5,1                     | 0,11    | 9,1         |
| 4,0                              | 4,4   | 3,8   | 4,3   | 4,2   | 4,1                     | 0,13    | 7,7         |
| 3,8                              | 4,0   | 3,8   | 3,6   | 4,0   | 3,8                     | 0,15    | 6,7         |
| 3,3                              | 3,6   | 3,2   | 3,3   | 3,2   | 3,3                     | 0,17    | 5,9         |
| 3,2                              | 3,0   | 3,1   | 3,1   | 3,2   | 3,1                     | 0,19    | 5,3         |
| 2,8                              | 2,5   | 2,6   | 2,6   | 2,6   | 2,6                     | 0,22    | 4,6         |
| 2,5                              | 2,4   | 2,3   | 2,6   | 2,3   | 2,4                     | 0,25    | 4,0         |
| 1,90                             | 2,00  | 1,85  | 2,00  | 2,10  | 2,0                     | 0,31    | 3,2         |
| 1,55                             | 1,35  | 1,40  | 1,45  | 1,50  | 1,5                     | 0,37    | 2,7         |
| 1,25                             | 1,35  | 1,30  | 1,30  | 1,35  | 1,3                     | 0,43    | 2,3         |



Результаты эксперимента подтверждают, что зависимость  $F(x)$  имеет вид:

$$F = b + k \frac{1}{x} \quad (20),$$

$$b = \mu_1 mg \quad (21), \quad k = \frac{(\mu_1 + \mu_2)MgL}{2} \quad (22).$$

$$F = b + k \frac{1}{x} \quad (20)$$

$$b = \mu_1 mg, \quad (21)$$

$$k = \frac{(\mu_1 + \mu_2)MgL}{2}. \quad (22)$$



2.4. Значения коэффициентов  $b$  и  $k$  определим по графику зависимости  $F(1/x)$ :  $b$  – координата пересечения усредняющей прямой оси  $F$ ,  $k$  – тангенс угла наклона усредняющей прямой к оси  $1/x$ .

$$b = 0,17 \text{ Н}, \quad k = 0,54 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$b = 0,17 \text{ Н}$ ,  $k = 0,54 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Из (21) получим:

$$\mu_1 = \frac{b}{mg} = \frac{0,17 \text{ Н}}{0,0932 \text{ кг} \cdot 9,813 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 0,19 \quad (23).$$

$$\mu_1 = \frac{b}{mg} = \frac{0,17 \text{ Н}}{0,0932 \text{ кг} \cdot 9,813 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 0,19. \quad (23)$$

Из (22) получим:

$$\mu_2 = \frac{2k}{MgL} - \mu_1 = \frac{2 \cdot 0,54 \text{ Н} \cdot \text{м}}{0,3431 \text{ кг} \cdot 9,813 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 0,452 \text{ м}} - 0,19 = 0,52 \quad (24).$$

$$\mu_2 = \frac{2k}{MgL} - \mu_1 = \frac{2 \cdot 0,54 \text{ Н} \cdot \text{м}}{0,3431 \text{ кг} \cdot 9,813 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 0,452 \text{ м}} - 0,19 = 0,52. \quad (24)$$

и;  $\vec{N}_2$   
 $M\vec{g}$