

Разминка

Условие

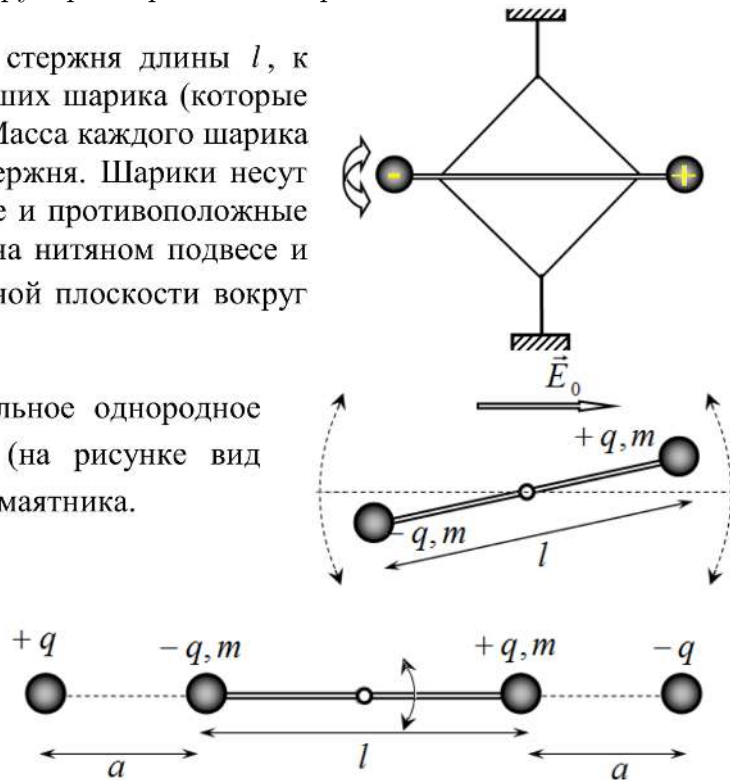
Задача 11-1. «Разминка»

Задача состоит из двух не связанных между собой задач.

Задача 1.1 Крутильный маятник состоит из легкого стержня длины l , к концам которого прикреплены два небольших шарика (которые можно считать материальными точками). Масса каждого шарика равна m и значительно больше массы стержня. Шарика несут электрические заряды, равные по величине и противоположные по знаку $+q$ и $-q$. Стержень подвешен на нитяном подвесе и может свободно вращаться в горизонтальной плоскости вокруг фиксированной вертикальной оси.

Стержень длины l , к
концам которого
прикреплены два
небольших шарика
(которые можно
считать материальными
точками). Масса
каждого шарика
равна m и значи-
тельно больше
массы стержня. Шарика
несут электрические
заряды, равные по
величине и противо-
положные по знаку
 $+q$ и $-q$. Стержень
подвешен на нитяном
подвесе и может
свободно вращаться
в горизонтальной
плоскости вокруг

фиксированной
вертикальной оси.
Маятник помещают
в горизонтальное
однородное
электрическое поле
(на рисунке вид
сверху). Найдите
период малых
колебаний маятника.

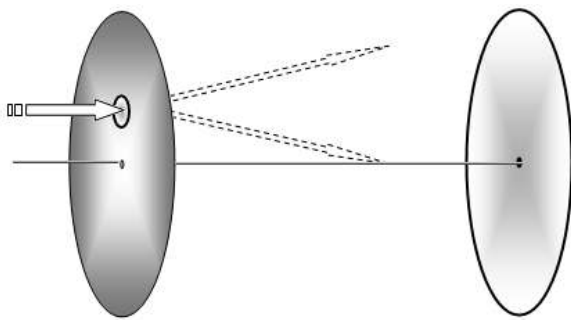


1.1.1 Маятник помещают в горизонтальное однородное электрическое поле напряженности $\vec{E}_0$ (на рисунке вид сверху). Найдите период малых колебаний маятника.

1.1.2 На расстоянии a от каждого шарика закрепили еще два таких же шарика. Модули зарядов всех шариков одинаковы, а знаки таковы, что ближайшие шарика притягиваются. Внешнее электрическое поле отсутствует. Чему равен период малых колебаний маятника в этом случае?

1.1.3 Пусть период колебаний маятника в однородном поле (как в п.1.1.1) равен T_1 , а при наличии дополнительных зарядов (как в п. 1.1.2) равен T_2 . Чему будет равен период колебаний, если на маятник воздействует как внешнее однородное поле, так и дополнительные заряды?

Задача 1.2



Круглая дифракционная решетка состоит из чередующихся прозрачных и черных концентрических колец одинаковой толщины $b = 10$ мкм. На решетку посылают нормально пучок лазерного света с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Сечение пучка является круглым, диаметр пучка $a = 2,0$ мм. На расстоянии $L = 1,0$ м от решетки находится круглый экран, радиуса $R = 10$ см. Оси решетки и экрана совпадают.

1.2.1 Центр лазерного пучка падает на решетку, так что его центр находится на расстоянии $l = 2,0$ см от центра решетки. Нарисуйте схематически дифракционную картину на экране. Укажите геометрические размеры ее основных элементов.

1.2.2 Опишите изменение параметров дифракционной картины, если расстояние от центра пучка до центра решетки станет равным $l = 4,0$ см.

Решение

Задача 11-1. «Разминка»

Задача 1.1 Для расчета периодов колебаний можно использовать как динамический, так и энергетический подход. Воспользуемся энергетическим подходом. В рамках этого метода необходимо ввести некоторую переменную величину x . Далее необходимо найти кинетическую энергию системы, представив ее в виде

$$E_k = Mv^2. \quad (1)$$

Где $v = x'$ - первая производная от координаты по времени, M - постоянная величина. Найти потенциальную энергию, как функцию координаты $U(x)$, Полагая смещение от положения равновесия малым, записать приближенное выражение для изменения потенциальной энергии, оставляя только квадратичные слагаемые, т.е представив это изменение в виде

$$U = Kx^2. \quad (2)$$

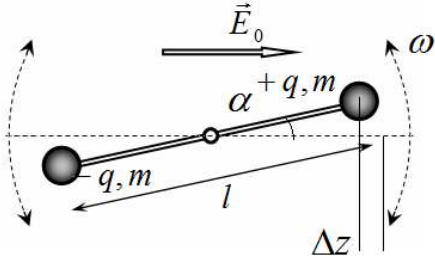
Где K - также постоянная величина. Затем записать уравнение закона сохранения энергии:

$$Mv^2 + Kx^2 = const, \quad (3)$$

которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}. \quad (4)$$

1.1.1 В положении равновесия ось маятника совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля. В качестве координаты будем рассматривать угол отклонения маятника от этого направления α . Производная от этого угла есть угловая скорость вращения ω .



Кинетическая энергия маятника легко рассчитывается по формулам

$$E_k = 2 \frac{mv^2}{2} = m \left(\frac{l}{2} \omega \right)^2 = \frac{ml^2}{4} \omega^2. \quad (5)$$

Потенциальная энергия каждого шарика выражается через разность потенциалов в положении равновесия и в отклоненном положении. Поэтому

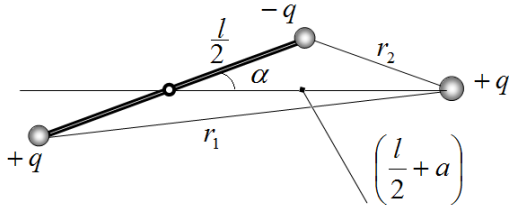
$$\Delta U = 2q\Delta\varphi = 2qE\Delta z = 2qE \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha) = qEl \frac{\alpha^2}{2}. \quad (6)$$

Используя формулу (4) и полученные выражения для энергий находим период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2qE}}. \quad (7)$$

1.1.2 Выражение для кинетической энергии (5) справедливо и в данном случае. Рассмотрим потенциальную энергию взаимодействия зарядов на маятнике с одним из неподвижных зарядов. Энергия взаимодействия шариков выражается формулой (см. рис.)

$$U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (8)$$



Расстояния между шариками можно выразить из теоремы косинусов:

$$r_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2} \right)^2 + \left(\frac{l}{2} + a \right)^2 \pm 2 \left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right) \cos \alpha}. \quad (9)$$

В формулу для потенциальной энергии входят величины обратные расстояниям, поэтому сразу проведем их разложение, учитывая малость угла α :

$$r_{1,2}^{-1} = \left(\left(\frac{l}{2} \right)^2 + \left(\frac{l}{2} + a \right)^2 \pm 2 \left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right) \cos \alpha \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \left(\left(\frac{l}{2} \right)^2 + \left(\frac{l}{2} + a \right)^2 \pm 2 \left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(\frac{l}{2} + a \pm \frac{l}{2} \right)^2 \mp \left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right) \alpha^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{l}{2} + a \pm \frac{l}{2} \right)^{-1} \left(1 \mp \frac{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right)}{\left(\frac{l}{2} + a \pm \frac{l}{2} \right)^2} \alpha^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \\
&= \left(\frac{l}{2} + a \pm \frac{l}{2} \right)^{-1} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right)}{\left(\frac{l}{2} + a \pm \frac{l}{2} \right)^2} \alpha^2 \right)
\end{aligned}$$

Запишем эти выражения отдельно:

$$\begin{aligned}
r_1^{-1} &= (l+a)^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right)}{(l+a)^2} \alpha^2 \right) = (l+a)^{-1} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right)}{(l+a)^3} \alpha^2 \\
r_2^{-1} &= a^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right)}{a^2} \alpha^2 \right) = a^{-1} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right)}{a^3} \alpha^2
\end{aligned} \tag{10}$$

Теперь подставим их в формулу для кинетической энергии (не зависящие от α слагаемые опускаем):

$$U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right)}{(l+a)^3} + \frac{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right)}{a^3} \right) \alpha^2 \tag{11}$$

Снова используем формулу (5) для периода колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 m l^2}{q^2 \left(\frac{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right)}{(l+a)^3} + \frac{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + a \right)}{a^3} \right)}}. \tag{12}$$

1.1.3 Так как выражение для кинетической энергии остается неизменным, то необходимо только просуммировать выражения для энергии потенциальных (фактически сложить два коэффициента K в формуле (5)). Это приведет к тому, что для периодов колебаний будет выполняться соотношение:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_1 \cdot T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}. \tag{13}$$

Задача 1.2

1.2.1 В данном случае будет наблюдаться дифракция на решетке: возникать равноотстоящие пятна. Период данной решетки равен

$$d = 2h = 20 \text{ мкм} = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ м} \tag{1}$$

По формуле дифракционной решетки определим углы дифракции:

$$d \sin \theta_m = m\lambda \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_m = \frac{m\lambda}{d}. \tag{2}$$

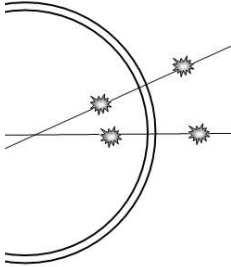
Пятна на экране, соответствующие данным углам дифракции, будут отстоять от центрального максимума на расстояниях

$$x_m = L \operatorname{tg} \theta_m. \tag{3}$$

В таблице 1 рассчитаны эти углы для нескольких первых максимумов. Таблица 1.

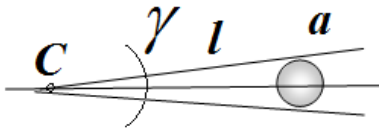
m	$\sin \theta_m$	x , мм
1	0,0275	27,5
2	0,0550	55,0
3	0,0825	82,5
4	0,1100	110,0

Как следует из проведенных расчетов, углы дифракции являются малыми, поэтому можно считать, что их тангенсы и синусы равны. В последнем столбце приведены координаты максимумов. Видно, что четвертый максимум окажется за пределами экрана.

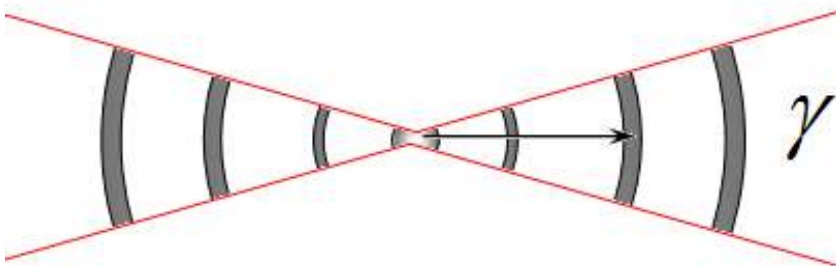


Далее необходимо учесть, что штрихи являются изогнутыми. Поэтому пятна также будут изогнутыми и представлять собой симметричные дуги окружностей. Схематически положение этих пятен при попадании света на разные части дуг решетки, показаны на рисунке (масштабы дуг решетки и расстояний до пятен не соблюдены). Вычислим угловой размер дуговых пятен, который совпадает с угловым размером лазерного пучка на решетке. Этот угловой размер не сложно вычислить с помощью рисунка:

$$\gamma = 2 \arcsin \left(\frac{a}{2l} \right) \approx 11^\circ \quad (4)$$



На следующем рисунке показана схематически дифракционная картина.



1.2.2 При изменении расстояния l дифракционная картина сместится на такое же расстояние, угловой размер пятен уменьшится приблизительно в два раза.