

Условие

Задание 10-1. Разминка

Задание состоит из трех не связанных между собой задач.

Задача 1. Кольцевая ЭДС

1.1 В схеме, показанной на рис. 1, ЭДС источника равно ε , его внутренне сопротивление r , сопротивление резистора R . 1.1.1 Чему равна разность потенциалов ($\varphi_2 - \varphi_1$) между точками, показанными на рисунке? 1.1.2 Выразите эту разность через параметры источника и силу тока через него.

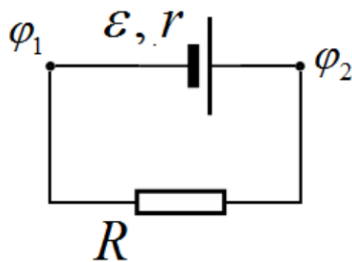


Рис. 1

1.2.1 Чему равна сила тока через резистор в схеме, показанной на рис. 2? Параметры элементов, указанные на рисунке. 1.2.2 Можно ли два источника заменить одним? Если да, то найдите ЭДС и внутренне сопротивление такого источника.

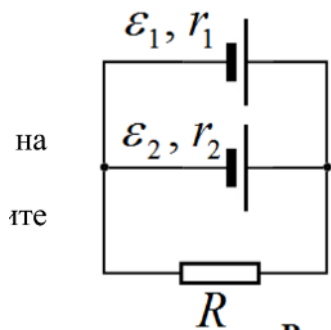


Рис. 2

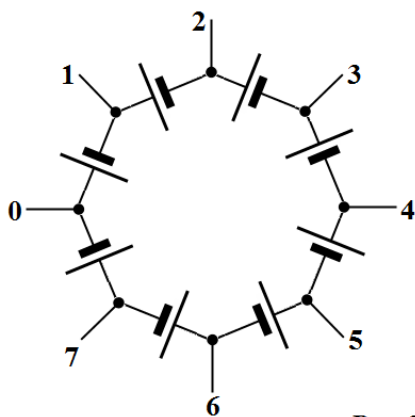


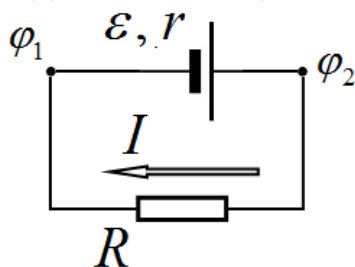
Рис. 3

1.3 Восемь одинаковых источников (ЭДС каждого равно ε , внутренне сопротивление r) соединены так, как показано на рис. 3. Чему будет равно показание вольтметра, если его подключить к точкам «0» и «k» ($k = 1, 2, \dots, 7$) сопротивление вольтметра считайте бесконечно большим.

Решение

Задание 10-1. Разминка

Задача 1. Кольцевая ЭДС



1.1.1 По закону Ома для полной цепи сила тока в этой цепи равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (1)$$

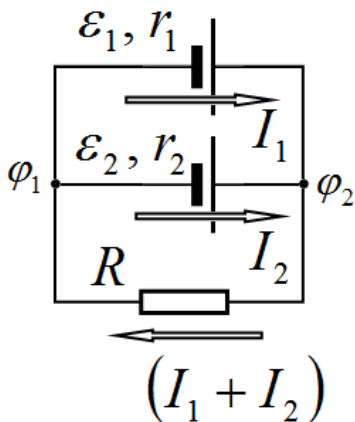
Следовательно, искомая разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = IR = \mathcal{E} \frac{R}{R + r}. \quad (2)$$

1.1.2 Полученное выражение можно преобразовать к виду

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E} \frac{R}{R + r} = \mathcal{E} \frac{R + r - r}{R + r} = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{R + r} r = \mathcal{E} - Ir. \quad (3)$$

Впрочем, это соотношение можно записать сразу, сославшись на



закон для участка цепи с активным элементом.

1.2.1 Используя соотношение (2) и закон Ома для участка цепи, запишем систему уравнений для сил токов в различных ветвях рассматриваемой цепи

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = (I_1 + I_2) R \\ \mathcal{E}_2 - I_2 r_2 = (I_1 + I_2) R \end{cases}. \quad (4)$$

Решение этой системы дает искомый результат

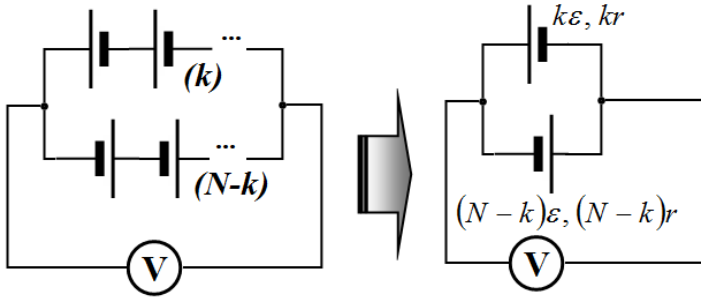
$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = (I_1 + I_2) R \\ \mathcal{E}_2 - I_2 r_2 = (I_1 + I_2) R \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} - I_1 = (I_1 + I_2) \frac{R}{r_1} \\ \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} - I_2 = (I_1 + I_2) \frac{R}{r_2} \end{cases} \Rightarrow \\ \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} - (I_1 + I_2) &= (I_1 + I_2) \left(\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} \right) \Rightarrow I_R = (I_1 + I_2) = \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{1 + R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \end{aligned} \quad (5)$$

1.2.2 Последнее соотношение можно переписать в виде

$$I_R = (I_1 + I_2) = \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{1 + R\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{\left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1} + R}, \quad (6)$$

который совпадает с законом Ома для полной цепи $I = \frac{\mathcal{E}_0}{R+r_0}$. Следовательно, во-первых, два параллельно соединенных источника можно заменить одним, во-вторых, характеристики этого источника описываются не очевидными формулами:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}; \\ r_0 &= \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \end{aligned} \quad (7)$$



1.3 При подключении вольтметра к нулевой и k - точкой эквивалентная схема выглядит, как показано на рисунке. Здесь учтено, что при последовательном соединении источников их ЭДС и внутренние сопротивления складываются.

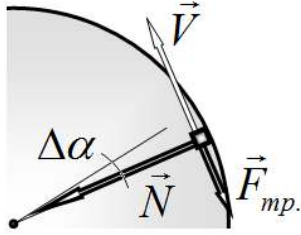
Для расчета напряжения можно воспользоваться полученной формулой (6), в которой следует положить $\mathcal{E}_1 = k\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_2 = -(N-k)\mathcal{E}$, $r_1 = kr$, $r_2 = (N-k)r$. Подстановка этих значений приводит к результату – сила тока через вольтметр, а следовательно и напряжение на нем равно нулю!

Этот же результат следует и из закона (3), так сила тока в цепи равна $I = \frac{N\mathcal{E}}{Nr} = \frac{\mathcal{E}}{r}$, поэтому при любом подключении $\Delta\varphi = k\mathcal{E} - Ikr = 0$.

Задача 2. Шайба

Изменение скорости шайбы обусловлено силой трения о борт. При движении вдоль прямолинейных бортов отсутствует сила, прижимающая шайбу к борту, поэтому в этом случае трение отсутствует, и скорость шайбы остается постоянной. При движении вдоль закругления появляется сила реакции, действующая на шайбу и сообщающая ей центростремительное ускорение. Изменение модуля скорости шайбы описывается уравнением 2 закона Ньютона в проекции на направление скорости шайбы

$$m \frac{\Delta V}{\Delta t} = -F_{\text{тр}}. \quad (1)$$



Сила трения связана с силой реакции законом Кулона – Амонтона

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (2)$$

Наконец, сила реакции может быть выражена через центростремительное ускорение

$$\frac{mV^2}{R} = N. \quad (3)$$

Здесь R - радиус закругления.

Таким образом, изменение модуля скорости описывается уравнением

$$m \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\mu \frac{mV^2}{R}. \quad (4)$$

Так как нас не интересует зависимость скорости от времени, перейдем в этом уравнении к зависимости изменения скорости от угла поворота. Пусть за малый промежуток времени Δt шайба прошла путь $\Delta S = V\Delta t$ и при этом повернула на малый угол $\Delta\alpha$. Эти величины связаны геометрическим соотношением

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta S}{R} = \frac{V\Delta t}{R}. \quad (5)$$

С учетом этого выражение, уравнение (4) принимает вид

$$\Delta V = -\mu V \frac{V\Delta t}{R} \Rightarrow \Delta V = -\mu V \Delta\alpha. \quad (6)$$

Из этого уравнения следует, что относительное изменение скорости шайбы пропорционально углу поворота

$$\frac{\Delta V}{V} = -\mu \Delta\alpha \quad (7)$$

Следовательно, при повороте на некоторый угол α модуль скорости уменьшается в одно и тоже число раз. Так как прохождение каждого закругления соответствует повороту на один и тот же угол 90° , то и уменьшение скорости на каждом закруглении также будет в одно и то же число раз, то есть

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{V_2}{V_1}. \quad (8)$$

Из этого выражение определяем искомую конечную скорость

$$V_2 = \frac{V_1^2}{V_0}. \quad (9)$$

Дополнение.

1. Проведенные рассуждения можно проиллюстрировать и математическими выкладками. Разобьем угол поворота α на малые интервалы $\Delta\alpha$. Тогда из уравнения (7) следует, что скорости после прохождения k и $(k-1)$ интервалов связаны соотношением

$$V_k = V_{k-1}(1 - \mu\Delta\alpha). \quad (10)$$

То есть последовательность V_k является геометрической прогрессией, поэтому каждый член этой последовательности выражается в явном виде следующим образом

$$V_k = V_0(1 - \mu\Delta\alpha)^k. \quad (11)$$

Если выразить число шагов, как $k = \frac{\alpha}{\Delta\alpha}$, то выражение (11) можно переписать в виде

$$V_k = V_0(1 - \mu\Delta\alpha)^{\frac{\alpha}{\Delta\alpha}} = V_0 \exp(-\mu\alpha). \quad (12)$$

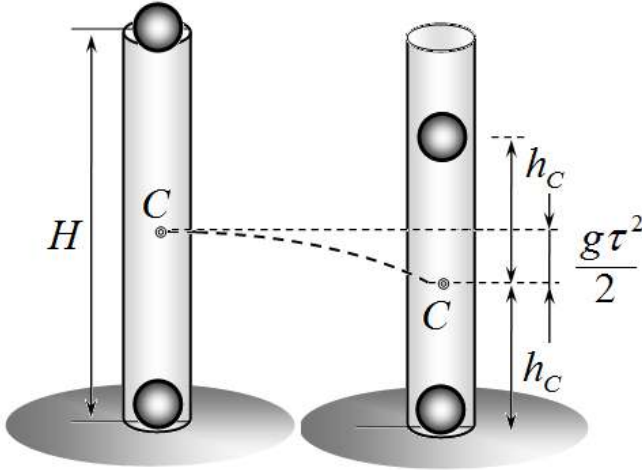
Здесь на последнем шаге использован замечательный предел. Его можно «доказать» следующим образом. Если при малых x справедливо выражение $\exp(x) \approx 1 + x$, то справедливо и обратное $1 + x \approx \exp(x)$. Поэтому $(1 + x)^\beta \approx \exp(\beta x)$, откуда и следует формула (12).

Наконец, можно просто проинтегрировать уравнение (7):

$$\frac{dV}{V} = -\mu d\alpha \Rightarrow \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = -\mu \int_0^\alpha d\alpha \Rightarrow \ln \frac{V}{V_0} = -\mu\alpha \Rightarrow V = V_0 \exp(-\mu\alpha)$$

Обратим внимание, что данная формула совпадает с формулой Эйлера, описывающей изменение силы натяжения нити переброшенной через цилиндр.

Задача 3. Шарики в трубе



Силы взаимодействия между шариками (как электростатические, так и упругие в момент столкновения) являются внутренними для системы двух шариков, поэтому они влияют на движение центра масс шариков. Следовательно, центр масс шариков движется вниз с ускорением свободного падения, независимо от того, до столкновения, после столкновения... Так как массы шариков одинаковы, то центр масс C находится на середине отрезка их соединяющего. За время τ центр масс двух шариков опустится на расстояние $\frac{g\tau^2}{2}$ и окажется на высоте

$$h_C = \frac{H}{2} - \frac{g\tau^2}{2}. \quad (1)$$

Здесь $\frac{H}{2}$ - высота центра масс в начальный момент времени (в момент отпускания). Так как нижний шарик в это момент оказался на дне сосуда, то второй шарик окажется на высоте в 2 раза большей высоты центра масс, т.е.

$$h_1 = 2h_C = H - g\tau^2. \quad (2)$$

Примечание. Исходные данные позволяют заключить, что в рассматриваемый момент времени второй шарик будет находиться выше.