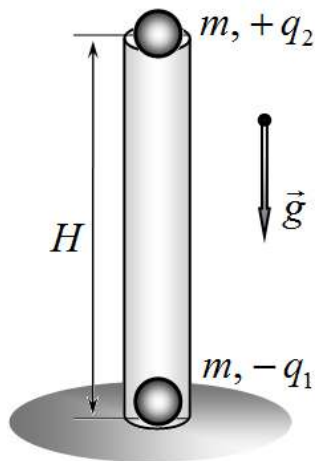


Условие

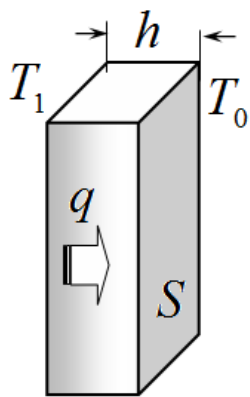
Задача 3. Шарики в трубе

На дне узкого вертикального цилиндрического стеклянного сосуда высотой H лежит небольшой проводящий шарик массы m , имеющий отрицательный электрический заряд $-q_1$. Радиус шарика значительно меньше высоты сосуда. К верхней части сосуда подносят такой же шарик, несущий положительный заряд $+q_2$, причем $|q_2| > |q_1|$. Нижний шарик отрывается от дна и в этот момент верхний шарик отпускают (можно считать, что начальные скорости шариков равны нулю). Через время τ нижний шарик опять оказывается на дне сосуда. Найдите высоту над дном сосуда h_1 , на которой в этот момент времени будет находиться второй шарик. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Задача 10-2 «Закон Ома» для теплопередачи

Все материалы способны проводить тепло, но по-разному! В данной задаче вам предстоит рассчитать теплофизические характеристики некоторых материалов. Закон теплопроводности полностью совпадает с законом Ома для участка цепи. Он был сформулирован французским физиком Жаном Батистом Жозефом Фурье в 1807 году.



Закон утверждает, что количество теплоты, протекающей через однородную пластину толщины h и площади S в единицу времени (т.е. мощность теплопередачи), определяется по формуле

$$q = \lambda S \frac{\Delta T}{h} \quad (1)$$

Коэффициент λ в этой формуле называется коэффициентом теплопроводности и является характеристикой вещества.

Замените в этой формуле температуру на электрический потенциал, поток теплоты на силу тока, коэффициент теплопроводности на удельную электрическую проводимость и... перед вами закон Ома.

Формула (1) справедлива, если коэффициент теплопроводности является постоянной величиной, если нет – разбивайте пластину на тонкие слои... и для каждого слоя пишите отдельные уравнения. Впрочем, удельное сопротивление также может изменяться, например, если проводник разогревается.

Во всех частях данной задачи мы будем рассматривать пластины одинаковых размеров $S = 1,00 \text{ м}^2$, $h = 10,0 \text{ см}$. Для воздушной пластины будем подразумевать, что воздух находится в коробке указанных размеров, масса воздуха внутри нее остается неизменной. Влиянием самой коробки на протекание рассматриваемых процессов будем пренебрегать. Также будем рассматривать одинаковые начальные условия: пластина имеет постоянную температуру $T_0 = 0,0^\circ\text{C}$. Одна сторона пластины все время поддерживается при этой температуре, затем вторую сторону пластины приводят в тепловой контакт с очень массивным телом (термостатом), находящимся при температуре $T_1 = 20,0^\circ\text{C}$. Координату холодной стороны полагаем равной нулю, координата второй – h . По прошествии некоторого промежутка времени тепловой поток через пластину становится стационарным, то есть не зависящим от времени. Процесс установления равновесия достаточно сложный, нас он интересует не будет, основное внимание уделяется стационарному распределению температур и тепловым потокам в стационарном режиме. **Часть 1. Металлические пластины.**

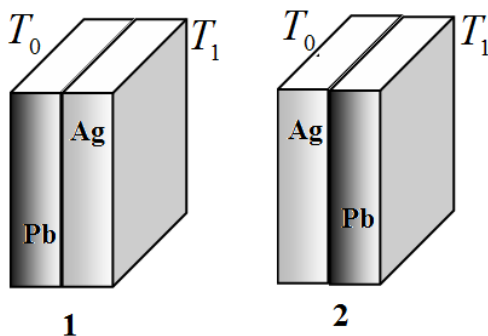
В этой части рассматриваются две пластины указанных размеров, серебряная и свинцовая. Для металлов коэффициенты теплопроводности можно считать постоянными. Табличные характеристики выбранных металлов приведены в таблице.

Металл	Плотность (ρ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$)	Удельная теплоемкость (C , $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$)	Коэффициент теплопроводности (λ , $\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$)
Серебро, <i>Ag</i>	$10,5 \cdot 10^3$	235	429
Свинец, <i>Pb</i>	$11,3 \cdot 10^3$	127	35,1

1.1 Рассчитайте потоки теплоты через каждую пластину в установившемся режиме q_{Ag} , q_{Pb} .

1.2 Рассчитайте количество теплоты, которое пошло на нагревание каждой пластины Q_{Ag} , Q_{Pb} .

Теперь соединим обе пластины. Сначала с холодной стороны находится свинцовая пластина (а серебряная с теплой), потом наоборот.



Для каждой составной пластины:

1.3 Рассчитайте потоки теплоты в установившемся режиме q_1 , q_2 . 1.4 Выразите значения q_1 , q_2 через значения потоков q_{Ag} , q_{Pb} , найденных в п.1.1. 1.5 Рассчитайте количества теплоты Q_1 , Q_2 , которые пошли на нагревание пластин до установившегося режима (с одной стороны температура T_0 , с другой T_1). 1.6 Постройте графики зависимости температуры внутри пластин от координаты (на одном бланке).

Часть 2. Воздушная пластина.

Теплоемкость воздуха зависит от температуры, кроме того, внутри коробки может происходить и перераспределение плотностей воздуха, поэтому, на первый взгляд, задача становится не решаемой! Но попробуйте! Конвективные явления не учитывать!

Коэффициент теплопроводности воздуха при температуре $T_0 = 0,0^\circ\text{C}$ равен $\lambda_0 = 0,024 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$.

Молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме равна $C_V = \frac{5}{2}R$. Давление воздуха в коробке при начальной температуре $T_0 = 0,0^\circ\text{C}$ равно $P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Па.

Математическая подсказка: при малых изменениях Δx справедливо равенство

$$x\Delta x = \frac{1}{2}\Delta(x^2)$$

Согласно упрощенной модели теплопроводности газов, их коэффициент теплопроводности должен определяться по формуле

$$\lambda = \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle l \rangle \rho c_V \quad (2)$$

где $\langle v \rangle$ — средняя скорость теплового движения молекул, $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега молекулы, ρ — плотность газа, c_V — удельная теплоемкость газа в изохорном процессе.

2.1 Длина свободного пробега молекул зависит от эффективного диаметра молекулы d и концентрации молекул n . Установите вид зависимости длины свободного пробега от указанных параметров.

2.2 Коэффициент теплопроводности пропорционален абсолютной температуре в некоторой степени $\gamma = \beta T^z$. Определите показатель степени z в этой формуле.

Независимо от полученного вами результата далее считайте, что теплопроводность воздуха прямо пропорциональна абсолютной температуре, т.е. $z = 1$.

Итак, одна сторона воздушного слоя имеет температуру $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$, вторая $t_1 = 20,0^\circ\text{C}$. Поток теплоты стал стационарным, газ в равновесии.

2.3 Рассчитайте поток теплоты через воздушный слой q_a , в предположении, что коэффициент теплопроводности воздуха постоянен (такой как при $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$).

2.4 Нарисуйте схематический график зависимости температуры воздуха от координаты в установившемся режиме. (Здесь вам нет необходимости получать точную формулу, и даже вид зависимости).

2.5 Рассчитайте поток теплоты через воздушный слой, учитывая зависимость коэффициента теплопроводности от температуры.

2.6 Рассчитайте количество теплоты, которое пошло на нагревание воздуха от начальной температуры до установившегося распределения температур, при условии, что коэффициент теплопроводности зависит от температуры.

Задача 10-3 Опыты III. Кулона



Эта задача составлена по данным, приведенным в работе Ш. Кулона «Первый мемуар по электричеству и магнетизму. Конструкция и применение электрических весов, основанных на свойстве металлических нитей иметь силу реакции при кручении, пропорциональную углу кручения», представленной в виде доклада на заседании в Королевской академии наук в 1785 году и опубликованной в 1788 году⁴. Цитаты из этого сочинения выделены курсивом.

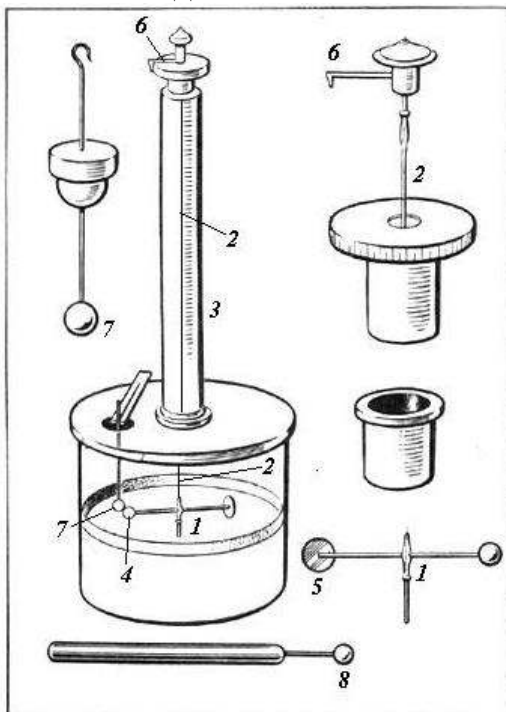
В задаче приводятся численные данные в системе единиц, принятой во Франции в конце XVIII века. Вы же должны приводить численные ответы в системе СИ.

Для перевода единиц используйте следующие данные: 1 дюйм (французский) = 2,707 см; 1 линия = 1/12 дюйма; 1 фут = 12 дюймов; 1 гран (единица массы и силы⁵) = 64,8 мг

Ускорение свободного падения считайте равным $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Электрическая постоянная

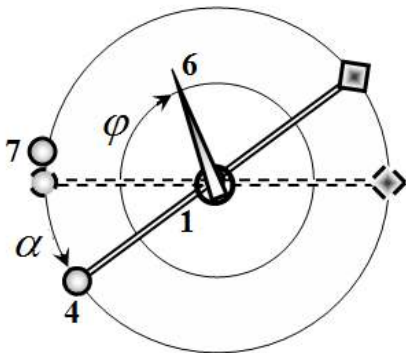
$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3}$$

Схема установки (крутильных весов) Ш. Кулона широко известна и показана на рисунке. Основными деталями весов являются:



1 – коромысло, на котором закреплены шарик из бузины 4 и противовес 5; 2 – тонкая серебряная нить, к нижнему концу которой прикреплено коромысло с шариком и противовесом, в положении равновесия коромысло располагается горизонтально; расстояние от центра шарика до точки подвеса (плечо коромысла) равно $r_0 = 4,0$ дюйма; верхний конец нити прикреплен к угловому микрометру 6. Указатель микрометра можно вращать и измерять угол закручивания; второй шарик из бузины 7 закрепляется неподвижно. Вся система помещена в стеклянный цилиндрический сосуд, на боковой поверхности которого расположена угломерная шкала, позволяющая измерять угол поворота коромысла. Шарикам 4 (на подвижном коромысле) и 7 (на неподвижном креплении) можно сообщать электрический заряд с помощью металлического шарика 8 на отдельной ручке. В состоянии равновесия (при отсутствии зарядов на шариках) коромысло располагается так, что шарики касаются друг друга, нить подвеса при этом не закручена, указатель углового микрометра установлен на нуль.

⁴ Перевод работы опубликован в книге Голин Г.М., Филонович С.Р. Классики физической науки (с древнейших времен до начала XX века): Справ. пособие. – М.: Высш. школа., 1989 г ⁵ Для перевода в единицы силы массу следует умножить на ускорение свободного падения. Измерения проводились следующим образом. Шарикам 4 и 7 сообщают электрические заряды и приводят их в соприкосновение (при этом их электрические заряды выравниваются). Коромысло поворачивается (угол поворота обозначен α), при необходимости с помощью головки углового микрометра нить можно дополнительно закрутить (угол закручивания обозначен φ). Отметим, что φ - угол поворота указателя углового микрометра.



Часть 1. Свойства нити подвеса.

«В Мемуаре, представленном в академию в 1784 году я на основе эксперимента определил закон для силы кручения металлической нити и обнаружил, что эта сила пропорциональна углу закручивания нити...»

Это высказывание можно представить в виде формулы: момент сил упругости $M_{\text{упр.}}$, возникающий при закручивании металлической нити рассчитывается по формуле

$$M_{\text{упр.}} = -G\varphi \quad (1)$$

здесь G - коэффициент пропорциональности (модуль кручения), зависящий от материала нити и ее размеров – длины и радиуса, φ - угол закручивания нити в радианах.

*«Серебряная нить, которая образует подвес, имеет длину 28 дюймов и эта нить настолько тонка, что фут длины этой нити весит всего $\frac{1}{16}$ грана. Рассчитывая силу, с которой следует подействовать на коромысло, в точке, удаленной на 4,0 дюйма от нити, или от центра подвеса, я нашел, что... для закручивания нити на 360° необходимо приложить силу всего в $\frac{1}{340}$ грана.»**

1.1 Определите по приведенным данным диаметр нити подвеса. Плотность серебра $\rho_{\text{Ag}} =$

$10,5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

1.2 Рассчитайте модуль кручения нити G .

Часть 2. Фундаментальный закон электричества.

*«Я привожу здесь только несколько измерений, которые легко повторить и которые тут же делают зримым закон отталкивания. При электризации двух шариков с помощью головки булавки, когда указатель микрометра установлен на нуль, шарик 4 удалился от шарика 7 на угол 36° ; При закручивании нити подвеса посредством головки микрометра на 126° два шарика сблизилась и остановились на расстоянии 18° один от другого. При закручивании нити подвеса на 567° два шарика сблизилась до $8,5^\circ$ »**

2.1 Используя приведенные данные, постройте график зависимости силы взаимодействия между шариками от расстояния между ними. Не забудьте подписать и оцифровать оси координат.

2.2 Покажите, что результаты эксперимента подтверждают зависимость силы электрического взаимодействия от расстояния, которая ныне называется законом Кулона.

2.3 Рассчитайте величины зарядов шариков в данном эксперименте. Постарайтесь, чтобы погрешность результата была минимальной.

Часть 3. Утечка заряда.

«Электричество на двух шариках немного уменьшается в зависимости от времени, которое длится эксперимент. Я проверил, что в тот день, когда был проведен описанный выше опыт, наэлектризованные шарики, находившиеся на расстоянии 30° один от другого при угле кручения 50° , сближались на 1° за 3 минуты»

3.1 Оцените удельное сопротивление воздуха в день проведения эксперимента.

Решение

Задача 3 Опыты Ш. Кулона (Решение)

1. Свойства нити подвеса.

1.1 В описании Ш. Кулона приведена масса нити m , она легко выражается через объем и плотность серебра

$$m = \rho_{Ag} L \frac{\pi d^2}{4}. \quad (1)$$

Из этой формулы легко выразить диаметр нити:

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho_{Ag} L}}. \quad (2)$$

При численных расчетах следует все параметры выразить в единицах системы СИ кг м³—
 $d = 2,55 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ (3) $\rho_{Ag} = 105,103 \cdot 10^3 \cdot 28,2707 \cdot 10^2 \text{ Мг/м}^3$

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho_{Ag} L}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{1}{16} \cdot 64,8 \cdot 10^{-6} \text{ кг}}{\pi \cdot 105,103 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 28 \cdot 2,707 \cdot 10^{-2} \text{ М}}} = 2,55 \cdot 10^{-5} \text{ М} \quad (3)$$

Менее трех сотых миллиметра!

1.2 Модуль кручения определяется по формуле

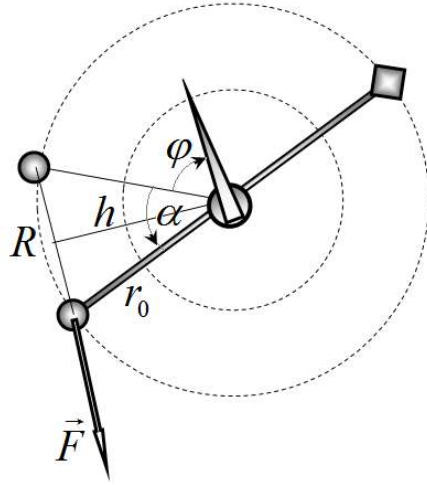
$$G = \frac{M}{\varphi} = \frac{Fr}{\varphi}. \quad (4)$$

Подстановка численных значений с переводом в систему СИ дает следующее значение

$$G = \frac{Fr}{\varphi} = \frac{\frac{1}{340} \cdot 64,8 \cdot 10^{-6} \cdot 9,81H \cdot 4 \cdot 2,707 \cdot 10^{-2} \varkappa}{2\pi} = 8,055 \cdot 10^{-9} H \cdot \varkappa = 8,1 \cdot 10^{-9} H \cdot \varkappa \quad (5)$$

2. Фундаментальный закон электричества.

2.1 Решение этой части задачи начнем с цитаты из использованного мемуара: «Расстояние между двумя шариками, когда они удалены друг от друга действием взаимного отталкивания, измеряется в точности не углом, который они образуют, а хордой дуги, которая соединяет их центры. Так же и плечо в крайнем положении, где проявляется действие, измеряется не половиной длины дуги, или радиусом, а косинусом половины угла...»



Вспользуемся подсказкой самого Шарля Кулона, рассмотрим условия равновесия коромысла крутильных весов. На рисунке показана геометрия опыта и направление силы взаимодействия между шариками $\vec{F}$. Из рисунка следует, что расстояние между шариками равно

$$R = 2r_0 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

Плечо силы взаимодействия

$$h = r_0 \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (7)$$

Угол закручивания нити

$$\varphi_{\Sigma} = \alpha + \varphi. \quad (8)$$

Условие равновесия коромысла весов имеет вид

$$G(\alpha + \varphi) = Fr_0 \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (9)$$

Следовательно, сила взаимодействия может быть рассчитана по формуле

$$F = \frac{G(\alpha + \varphi)}{r_0 \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (10)$$

Расстояние между шариками рассчитывается по формуле (6). Результаты расчетов по этим формулам приведены в Таблице (1). График этой функции показан на рисунке.

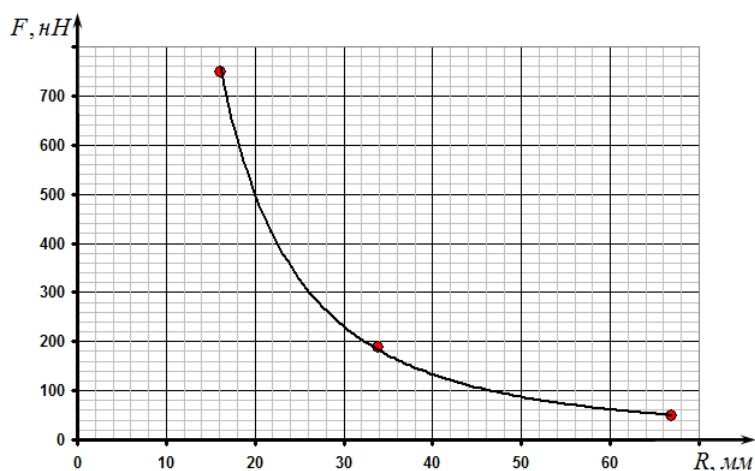
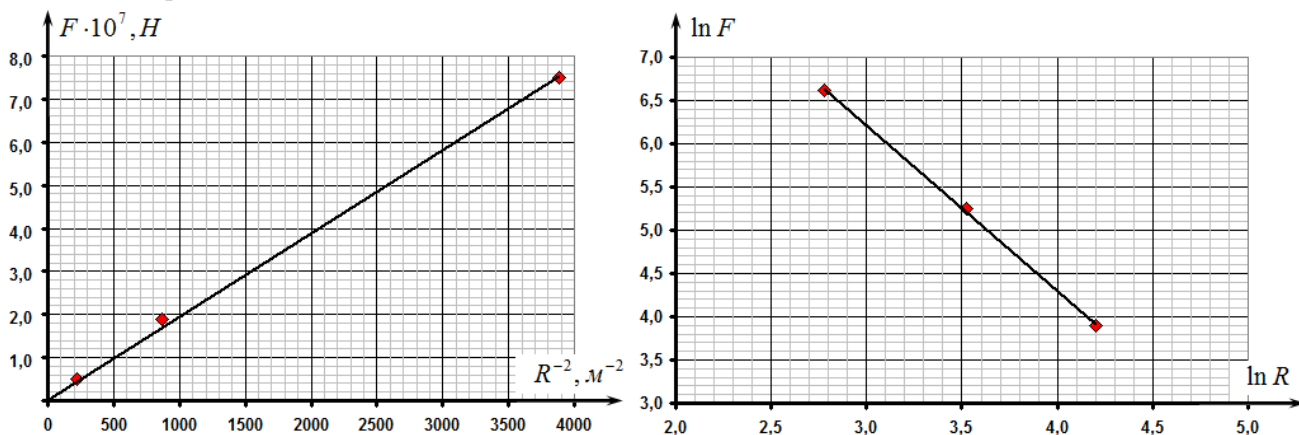


Таблица 1. Расчет сил и расстояний.

N	α°	φ°	F , нН	R , мм
1	36	0	49,1	66,9
2	18	126	189,3	33,9
3	8,5	567	749,3	16,0

2.2 Для доказательства закона Кулона ($F = \frac{A}{R^2}$) следует провести линеаризацию зависимости силы от расстояния. Эту линеаризацию можно провести различными способами. например, построить зависимость $F(R^{-2})$. Наиболее предпочтительной линеаризацией является построение графика в логарифмическом масштабе $\ln F(\ln R)$. В этом случае коэффициент наклона будет равен показателю степени в зависимости $F = AR^n$. На рисунке приведены графики обеих линеаризованных зависимостей.



Действительно, коэффициент наклона в логарифмической зависимости примерно равен -1,9, что с учетом неизбежных погрешностей измерений можно принять равным -2.

Также видно, что зависимость $F(R^{-2})$ близка к линейной, поэтому эта зависимость также подтверждает закон Кулона.

2.3 В системе СИ закон Кулона имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2}.$$

С помощью этой формулы можно вычислить заряды шариков. Для повышения точности следует провести усреднение по трем результатам измерений. Один из возможных вариантов такого усреднения – использование зависимости $F(R^{-2})$. В этой зависимости коэффициент

наклона равен

$$a = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} = 1,94 \cdot 10^{-10} \text{ H} \cdot \text{m}^2, \quad (11)$$

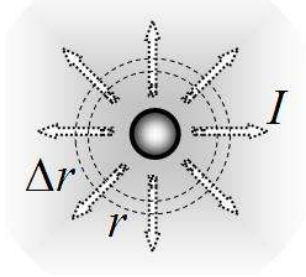
Откуда следует, что

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 a} = \sqrt{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,94 \cdot 10^{-10}} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}. \quad (12)$$

3. Утечка заряда.

Понятно, что уменьшение угла отклонения связано с утечкой зарядов с шариков. Поэтому в данной части задачи необходимо найти ответы на два вопроса: первый, как зависит заряд шарика от времени; второй – как связано изменение угла отклонения с изменением заряда. Можно считать, что шарик находится в однородной слабопроводящей среде, а электрический ток протекает от шарика до бесконечности.

В этом случае разность потенциалов равна потенциалу шарика



$$\Delta\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \quad (13)$$

Здесь обозначено b - радиус шарика (чтобы не путать с R - так мы обозначим сопротивление среды).

Для расчета сопротивления среды ее следует разделить на тонкие сферические слои. Сопротивление отдельного слоя радиуса r и толщины Δr равно

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta r}{4\pi r^2}. \quad (14)$$

Так как радиально растекающийся ток протекает последовательно через слои, то общее сопротивление равно сумме сопротивлений всех слоев

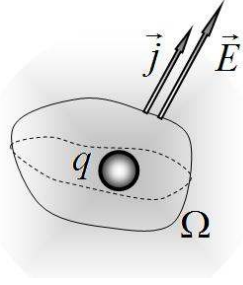
$$R = \sum_i \rho \frac{\Delta r_i}{4\pi r_i^2}. \quad (15)$$

Для выполнения суммирования (точнее интегрирования) можно сослаться на традиционный способ вычисления потенциала поля, создаваемого точечным источником – здесь сумма имеет тот же вид, поэтому

$$R = \sum_i \rho \frac{\Delta r_i}{4\pi r_i^2} = \frac{\rho}{4\pi b}. \quad (16)$$

Таким образом, находим, что сила тока утечки равна

$$I = \frac{\Delta\phi}{R} = \frac{q}{\rho\epsilon_0}. \quad (17)$$



Примечание. Этот же результат можно получить более изящным способом, используя теорему Гаусса. Мысленно окружим один из шариков произвольной замкнутой поверхностью Ω . Сила тока, стекающего с шарика равна потоку вектора плотности тока $\vec{j}$ через эту поверхность $I = \Phi_j$. По закону Ома в дифференциальной форме плотность тока связана с напряженностью электрического поля соотношением $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$. Поэтому поток вектора плотности тока связан с потоком вектора напряженности таким же соотношением: $\Phi_j = \frac{1}{\rho} \Phi_E$. Поток вектора напряженности поля определяется теоремой Гаусса $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$. Окончательно получаем $I = \Phi_j = \frac{1}{\rho} \Phi_E = \frac{q}{\rho \varepsilon_0}$. Полученное соотношение перепишем в виде

$$I = \frac{q}{\rho \varepsilon_0} = -\frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta q}{q} = -\frac{1}{\rho \varepsilon_0} \Delta t. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь, как связано угла смещения шарика с изменением зарядов на шариках. Сила взаимодействия выражается через угол смещения α посредством соотношения (10). Используя закон Кулона, можем записать

$$F = \frac{G(\alpha + \varphi)}{r_0 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q^2}{R^2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q^2}{(2r_0 \sin \frac{\alpha}{2})^2} \Rightarrow q^2 = B \frac{(\alpha + \varphi) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad (19)$$

где B - некоторая постоянная величина. Эта формула выражает связь между углом смещения и зарядами шариков. Обозначим функцию $f(\alpha) = \frac{(\alpha + \varphi) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. Изменение заряда определяется изменением этой функции. По-видимому, в данном случае проще провести численные расчеты изменения этой функции $\Delta f = f(\alpha - \Delta \alpha) - f(\alpha)$, хотя можно воспользоваться и приближенными формулами (вычислением производных). Учитывая, что изменения заряда мало, запишем

$$q^2 = B f(\alpha) \Rightarrow 2q \Delta q = B \Delta f \Rightarrow \frac{\Delta q}{q} = \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f(\alpha)} \quad (20)$$

Численный расчет относительного изменения заряда (при $\alpha = 30^\circ$, $\Delta \alpha = -1^\circ$, $\varphi = 50^\circ$) дает значение:

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f(\alpha)} = -0,039, \quad (21)$$

Примечание. Для оценки можно приближенно считать, что расстояние между шариками равно длине дуги между ними $r_0 \alpha$, а плечо силы равно r_0 . Тогда условие равновесия примет вид

$$G(\alpha + \varphi) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2 \alpha^2} r_0 \alpha.$$

Тогда проводя аналогичные (20) преобразования, получим

$$q^2 = B_1 \alpha(\alpha + \varphi) \Rightarrow$$

$$2q\Delta q = B_1(2\alpha + \varphi)\Delta\alpha \Rightarrow \frac{\Delta q}{q} = \frac{1}{2} \frac{2\alpha + \varphi}{\alpha(\alpha + \varphi)} \Delta\alpha = -0,023. \quad (22)$$

Теперь вернемся к формуле (18), из которой можно выразить искомое удельное сопротивление воздуха

$$\rho = -\frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \left(\frac{\Delta q}{q}\right)} = \frac{3 \cdot 60}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,039} \approx 5,2 \cdot 10^{14} \text{ Ом} \cdot \text{м}. \quad (23)$$

⁴ Перевод работы опубликован в книге Голин Г.М., Филонович С.Р. Классики физической науки (с древнейших времен до начала XX века): Справ. пособие. – М.: Высш. школа., 1989 г
⁵ Для перевода в единицы силы массу следует умножить на ускорение свободного падения.