

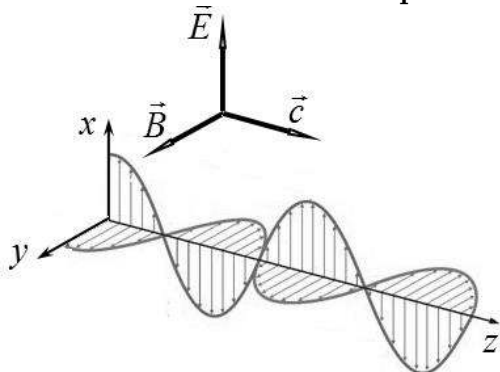
Условие

Задача 3 Давление света.



В некоторых книгах утверждается, что давление света подтверждает его квантовую природу. Однако, описать это явление можно точно и в рамках классической физики. Знаменитый исследователь давления света П.Н. Лебедев в своих экспериментах проверял теорию электромагнитную теорию Дж.К. Максвелла. В данной задаче вам предстоит рассчитать величину давления света, используя законы классической физики.

Часть 1. Свойства электромагнитных волн.



Свет представляет собой электромагнитную волну. Эта волна является поперечной: векторы напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения волны $\vec{c}$ (см. рисунок). Колебания напряженности электрического поля и индукции магнитного поля происходят в одной фазе, поэтому в произвольной точке они могут быть описаны функциями

$$\begin{cases} E = E_0 \cos \omega t \\ B = B_0 \cos \omega t \end{cases} \quad (1)$$

Амплитуды колебаний напряженности электрического поля и индукции магнитного поля связаны между собой так, что средняя объемная плотность энергии электрического поля равна средней объемной плотности энергии магнитного поля

$$\langle w_E \rangle = \langle w_B \rangle \quad (2)$$

Объемные плотности энергии электрического и магнитного полей определяются по формулам

$$w_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (3)$$

Скорость электромагнитной волны (скорость света) в вакууме рассчитывается по формуле

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad (4)$$

где ε_0, μ_0 - электрическая и магнитная постоянные, соответственно.

1.1 Запишите соотношение между амплитудами колебаний напряженности электрического E_0 поля, индукции магнитного поля B_0 и скоростью света c .

1.2 Выразите интенсивность света I через амплитуду колебаний вектора напряженности электрического поля волны E_0 .

Интенсивностью света называется усредненное по времени количество энергии, переносимой волной в единицу времени через площадку единичной площади $I = \frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S}$

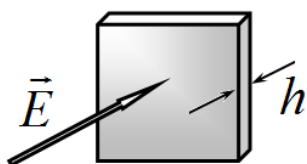
Часть 2. Движение электронов в металле и электрическое сопротивление.

Как известно, носителями электрического тока в металлах являются свободные электроны.

2.1 Рассчитайте концентрацию свободных электронов n в меди.

Считайте, что каждый атом меди отдает один электрон в облако свободных электронов.

Молярная масса меди $M_{\text{Cu}} = 63,5 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$, плотность меди $\rho_{\text{Cu}} = 8,92 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{моль}^{-1}$, заряд электрона $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{Кл}$, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3}$



Медная пластинка толщиной $h = 1,0 \text{см}$ помещена во внешнее однородное электростатическое поле напряженности $E = 30 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$ (в таких полях наступает электрический пробой воздуха). Вектор напряженности поля перпендикулярен поверхности пластинки.

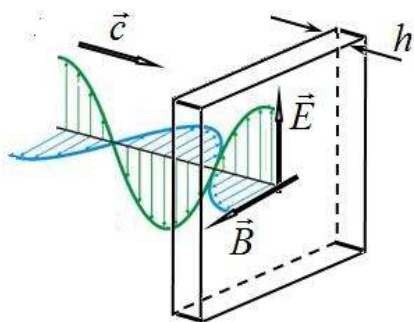
2.2 Рассчитайте, какая доля свободных электронов создает индуцированный заряд на поверхности пластинки при заданной напряженности внешнего электрического поля.

Для описания электрического сопротивления металлов в классической физике предполагается, что на движущийся в металле электрон действует тормозящая сила, пропорциональная его скорости

$$\vec{F} = -\beta \vec{v} \quad (5)$$

2.3 Выразите коэффициент пропорциональности β в формуле (5), через удельное электрическое сопротивление металла⁹ ρ и концентрацию свободных электронов n .

Часть 3. Давление света на поверхность металла.



Для расчета давления света рассмотрите следующую модель. Плоская электромагнитная волна падает нормально на очень тонкую металлическую пластинку толщиной h . Отражение волны не учитывать. Изменением амплитуды волны при прохождении через пластинку можно пренебречь, поэтому во всех точках пластинки поля описываются уравнениями (1). Движение электронов описывается на основании закона Ньютона, причем в первом приближении **можно пренебречь влиянием магнитного поля волны на движение электрона**. Начальную скорость электрона считайте равной нулю.

В дальнейшем считайте известными следующие величины: n - концентрация свободных электронов в пластинке, коэффициент сопротивления движению β для этих электронов, E_0 - амплитуда напряженности электрического поля волны, ω - круговая частота волны, h, S - толщина и площадь пластинки, m, e - масса и заряд электрона, c - скорость света. Ответы на последующие вопросы выражайте через эти величины.

9 9

3.1 Пренебрегая силой сопротивления, действующей на электрон, найдите зависимость скорости электрона от времени, при действии на него электромагнитной волны $v(t)$. 3.2 Рассчитайте среднее значение силы Лоренца, действующей на электрон в этом случае.

Далее следует учитывать действие силы сопротивления (4) на электрон.

3.3 Найдите зависимость скорости электрона от времени $v(t)$ при действии на него электрического поля волны.

Подсказка. Представьте эту зависимость в виде $v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, найдите значения коэффициентов этой зависимости.

3.4 Найдите усредненное по времени значение силы Лоренца, действующей на электрон. Укажите направление этой силы. 3.5 Найдите силу, действующую на всю пластинку со стороны падающей волны.

3.6 Рассчитайте коэффициент поглощения электромагнитной волны пластинкой K .

Коэффициентом поглощения называется отношение поглощенной энергии к энергии падающей волны.

3.7 Получите формулу для давления света на пластинку, выразите это давление через интенсивность волны и коэффициент поглощения пластинки.

Решение

Задача 11-3. Давление света. (Решение)

1. Свойства электромагнитных волн.

1.1 В условии задачи подсказано, что средние плотности энергии электрического и магнитного полей волны равны. Поэтому вычислим усредненные значения плотностей этих энергий. Мгновенное значение плотности энергии электрического поля описывается функцией

$$w_E(t) = \frac{\varepsilon_0}{2} (E(t))^2 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2 \omega t \quad (1)$$

Усреднение по промежутку времени, значительно превышающему период световых колебаний, дает

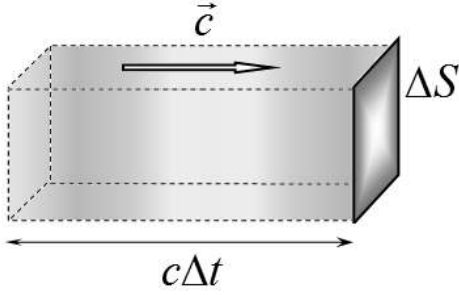
$$\langle w_E \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}. \quad (2)$$

При выводе учтено, что среднее значение квадрата косинуса равно $\langle \cos^2 t \rangle = \frac{1}{2}$. Аналогичные рассуждения дают аналогичный результат:

$$\langle w_B \rangle = \left\langle \frac{B_0^2}{2\mu_0} \cos^2 \omega t \right\rangle = \frac{B_0^2}{4\mu_0}. \quad (3)$$

Из равенства этих величин следует очень простое и красиво соотношение между амплитудами полей

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} = \frac{B_0^2}{4\mu_0} \Rightarrow E_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} B_0 = c B_0. \quad (4)$$



1.2 Рассмотрим небольшую прямоугольную площадку площади ΔS на которую нормально падает электромагнитная волна. На этой площадке, как на основании построим параллелепипед длиной $c\Delta t$. Вся энергия волны, заключенная в этом параллелепипеде за время Δt успеет проскочить через выделенную площадку. Поэтому за время Δt через площадку пройдет энергия равная

$$\Delta W = (w_E + w_B) \Delta S \cdot c \Delta t. \quad (5)$$

Усредняя по времени, получим $\Delta W = \langle w_E + w_B \rangle \Delta S \cdot c \Delta t$. Тогда интенсивность волны (по определению) будет равна

$$I = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} = c \langle w_E + w_B \rangle. \quad (6)$$

Принимая во внимание полученные выражения для средних плотностей энергии электрического и магнитного полей, получим выражение для интенсивности волны:

$$I = c \langle w_E + w_B \rangle = 2c \langle w_E \rangle = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}. \quad (7)$$

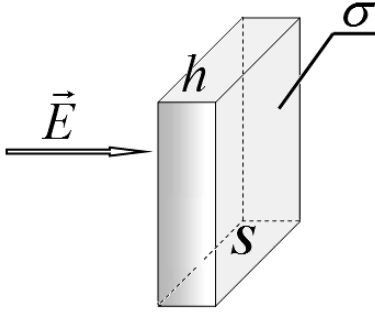
2. Движение электронов в металле и их электрическое сопротивление.

2.1 Считайте, что каждый атом меди отдает один электрон в облако свободных электронов. Молярная масса меди $M_{Cu} = 63,5 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$, плотность меди $\rho_{Cu} = 8,92 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{моль}^{-1}$ 2.1 Концентрация свободных электронов равна концентрации атомов в меди, которая рассчитывается элементарно:

$$n = \frac{\rho_{Cu}}{m_{Cu}} = \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}} N_A = \frac{8,92 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{63,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}} = 8,46 \cdot 10^{28} \text{м}^{-3}. \quad (8)$$

2.2 Напряженность электрического поля внутри металла равна нулю, так как внешнее поле компенсируется полем индуцированных зарядов. В данном случае индуцированные заряды локализуются на поверхности пластины, поэтому поверхностная плотность индуцированных зарядов связана с напряженностью создаваемого поля следующим соотношением

$$\sigma = \varepsilon_0 E \quad (9)$$



Здесь E - напряженность внешнего поля и она же напряженность поля индуцированных зарядов. Если площадь части пластинки равна S , то число электронов, находящихся на этой площадке равно $N' = \frac{\sigma S}{e}$ (e - заряд электрона), в то время как общее число свободных электронов в пластинке $N = nSh$. Таким образом, доля электронов, которые под действием внешнего поля переместились на поверхность, равна

$$\eta = \frac{N'}{N} = \frac{\sigma}{enh} = \frac{\varepsilon_0 E}{enh}. \quad (10)$$

Подставляя численные значения параметров этой формулы (заметим, что $E = 30 \frac{\text{кВ}}{\text{см}} = 3,0 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}$), получим

$$\eta = \frac{\varepsilon_0 E}{enh} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3,0 \cdot 10^6}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 8,46 \cdot 10^{28} \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}} = 2,0 \cdot 10^{-13}. \quad (10)$$

Очень маленькая доля!

2.3 При установившемся значении силы тока электроны движутся с постоянной скоростью (конечно, в среднем), в этом случае сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, уравнивается силой сопротивления

$$eE = \beta v. \quad (11)$$

Отсюда следует, что средняя скорость движения электронов равна

$$v = \frac{eE}{\beta}. \quad (12)$$

Тогда плотность тока равна

$$j = env = \frac{e^2 n}{\beta} E. \quad (13)$$

Эта формула выражает закон Ома в дифференциальной форме, который традиционно записывается в виде

$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (14)$$

Сравнивая эти выражения, находим, что искомый и не совсем понятный коэффициент может быть рассчитан по вполне измеряемым параметрам

$$\beta = \frac{\rho}{ne^2}. \quad (15)$$

3. Давление света на поверхность металла.

3.1 Уравнение движение свободного электрона по второму закону Ньютона имеет вид

$$ma = eE_0 \cos \omega t. \quad (16)$$

m - масса электрона, a - его ускорение.

Из этого уравнения следует, что скорость электрона зависит от времени по закону

$$v(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t \quad (17)$$

Вектор скорости лежит в той же плоскости, что и вектор напряженности электрического поля.

3.2 Так как вектор скорости электрона и вектор индукции магнитного поля взаимно перпендикулярны, сила Лоренца равна произведению модулей этих векторов, т.е.

$$F_L = evB = e \frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t \cdot B_0 \cos \omega t. \quad (18)$$

Среднее по времени значение этой силы равно нулю, так как $\langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$
Итак, в этом случае

$$\langle F_L \rangle = 0. \quad (19)$$

3.3 При наличии силы сопротивления уравнение движение электрона имеет вид

$$ma = eE_0 \cos \omega t - \beta v. \quad (20)$$

Используя подсказку, запишем

$$v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (21)$$

Ускорение электрона находим, вычисляя производную от этой функции

$$a = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \quad (22)$$

Подставим эти функции в уравнение (20)

$$-C_1 m \omega \sin \omega t + C_2 m \omega \cos \omega t = eE_0 \cos \omega t - C_1 \beta \cos \omega t - C_2 \beta \sin \omega t. \quad (23)$$

Так как это выражение должно быть справедливым в любой момент времени, можно приравнять коэффициенты, стоящие «при синусах и косинусах», в результате чего получаем систему уравнений для определения коэффициентов функции (21)

$$\begin{cases} -C_1 m \omega = -C_2 \beta \\ C_2 m \omega = eE_0 - C_1 \beta \end{cases}. \quad (24)$$

Решение этой системы элементарно:

$$C_2 = eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2}; \quad C_1 = eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \quad (25)$$

Подставляя эти выражение в функцию (21), получим искомую функцию

$$v(t) = eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \cos \omega t + eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2} \sin \omega t. \quad (26)$$

3.4 Так как в выражении для скорости присутствует слагаемое изменяющееся по закону косинуса, среднее значение силы Лоренца, действующее на один электрон, оказывается отличным от нуля. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle F_{\text{Л}}^{(1)} \rangle &= \langle evB \rangle = \left\langle e \left(eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \cos \omega t + eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2} \sin \omega t \right) B_0 \cos \omega t \right\rangle = \\ &= e^2 \frac{E_0 B_0}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} = e^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (27)$$

Легко показать, что эта сила направлена по направлению распространения волны. 3.5 Так как в пластинке содержится $N = nhS$ электронов, то суммарная средняя сила, действующая на пластинку оказывается равной

$$\langle F_{\text{Л}} \rangle = nhSe^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \quad (28)$$

3.6 Поглощение волны происходит только потому, что на электроны действует тормозящая сила (равносильно — потому, что есть электрическое сопротивление). Мощность поглощенной одним электроном энергии есть мощность силы сопротивления

$$p^{(1)} = F_{\text{сопр.}} v = \beta v^2 \quad (29)$$

Проводя усреднение по времени, получим

$$\begin{aligned} \langle p_1 \rangle &= \langle \beta v^2 \rangle = \left\langle \beta \left(eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2} \cos \omega t + eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \sin \omega t \right)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{(eE_0)^2}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (28)$$

При выводе учтено, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle \cos \omega t \cdot \sin \omega t \rangle = 0$ Мощность энергии, поглощенной всеми электронами равна

$$P_{\text{погл}} = N \langle p_1 \rangle = nhS \frac{(eE_0)^2}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \quad (29)$$

Мощность энергии падающей на пластинку равна

$$P_{\text{пад.}} = IS = I = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} S \quad (30)$$

Следовательно, коэффициент поглощения волны равен

$$K = \frac{P_{\text{погл}}}{P_{\text{пад}}} = \frac{nhe^2}{c\varepsilon_0} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \quad (31)$$

3.7 Давление света равно отношению силы (28) к площади пластинки

$$p = \frac{\langle F_{\text{Л}}^{(1)} \rangle}{S} = nhe^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \quad (32)$$

Поэтому осталось выразить эту формулу через интенсивность падающей волны и коэффициент поглощения, что делается достаточно просто: просто переставим слагаемые в формуле (28)

$$p = \frac{\langle F_{\text{Л}}^{(1)} \rangle}{S} = nhSe^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} = \left(\frac{nhSe^2}{c\varepsilon_0} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c \right) \frac{1}{c} = K \frac{I}{c} \quad (33)$$

Заметим, что в точности такое же выражение для давления света следует и из квантовой теории.

⁹ Не путайте с плотностью!