

Условие

Задача 10-2 Короткий толчок

Если на тело действует некоторая сила в течение малого промежутка времени Δt , очень часто используют **теорему об изменении импульса** тела (которая равносильна второму закону Ньютона): изменение импульса тела равно импульсу действующей силы:

$$\Delta \vec{P} = \vec{F} \Delta t. \quad (1)$$

При этом пренебрегают смещением тела за время действия силы. Но в этом подходе скрыто противоречие: если скорость тела изменилась, то изменилась его кинетическая энергия. С другой стороны, справедлива **теорема о кинетической энергии**: изменение кинетической энергии тела, равно работе внешних сил:

$$\Delta E_{\text{кин.}} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}. \quad (2)$$

Но если пренебречь смещением тела за время действия силы, то работа оказывается равной нулю (!), следовательно, энергия тела и его скорость не изменяется!

Продемонстрируйте свое понимание физики и используемых приближенных методов: покажите, что между этими теоремами никаких противоречий не возникает.

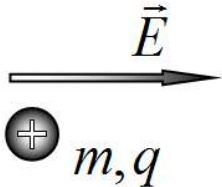
*Во всех частях задачи рассматривается движение небольшой частицы (материальной точки) массы m , имеющей постоянный электрический заряд q^{***} .*

Силой тяжести, силой сопротивления воздуха следует пренебрегать.***

В ходе решения вам необходимо использовать единственную приближенную формулу, справедливую при малых значениях безразмерной величины $x \ll 1$:

$$(1 + x)^\gamma \approx 1 + \gamma x, \quad (3)$$

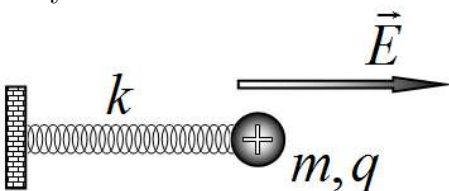
Эта формула справедлива при любых значениях показателя степени γ .



Часть 1. Постоянная сила.

Частица свободна и находится в состоянии покоя. На короткий промежуток времени τ включается постоянное электростатическое поле, напряженность которого равна E .

1.1 Используя теорему об изменении импульса (1), найдите скорость v_0 , которую приобретет частица за время включения электрического поля. Постройте схематический график зависимости скорости частицы от времени. 1.2 Найдите скорость частицы после выключения поля v_0 , используя теорему о кинетической энергии (2). Постройте схематический график зависимости скорости частицы от ее координаты. 1.3 Совпадают ли значения скорости v_0 , полученные в пп. 1.1 – 1.2?



Часть 2. Сила упругости.

Частицу прикрепили с помощью легкой непроводящей пружины жесткостью k к неподвижной стенке. Частица находится в состоянии покоя, затем на короткий промежуток времени τ включается постоянное электростатическое поле, напряженность которого постоянна (в течение указанного промежутка) равна $\vec{E}$ и направлена вдоль пружины. При решении этой задачи вам следует использовать два приближения (и сравнить их между собой).

Первое приближение: пренебрегаем смещением частицы за время действия поля τ

Второе приближение: учитываем смещение частицы, но пренебрегаем изменением ее ускорения, т.е. считаем, что она движется с постоянным ускорением, равным ускорению в начальный момент времени.

2.1 Используя *первое приближение*, найдите приближенное значение скорости частицы сразу после выключения поля $\tilde{\nu}_0$.

2.2 Используя теорему об изменении импульса (1), найдите значение скорости частицы сразу после выключения поля ν_0 во *втором приближении*.

2.3 Разность между найденными значениями служит оценкой погрешности первого приближения. Найдите (в виде формулы) относительную погрешность значения скорости $\tilde{\nu}_0$:

$$\varepsilon_\nu = \frac{\nu_0 - \tilde{\nu}_0}{\tilde{\nu}_0}. \quad (4)$$

2.4 Получите формулу для значения скорости ν_0 с помощью теоремы о кинетической энергии (2) во *втором приближении*.

2.5 Упростите формулу, полученную в п. 2.4, используя приближенную формулу (3). Сравните ее с формулой, полученной на основе теоремы об изменении импульса (п. 2.2). Совпадают ли они?

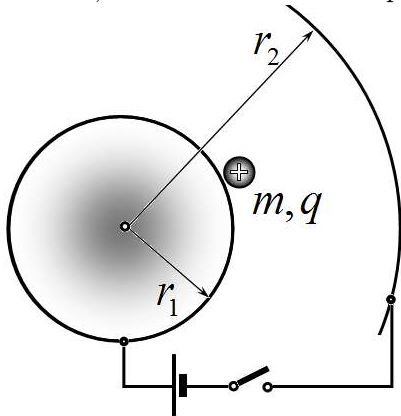
2.6 Какая из формул (п. 2.2 или п. 2.4) является правильной?

2.7 Найдите максимальное смещение частицы $\tilde{X}$ в процессе движения в **первом приближении**.

2.8 Найдите относительную погрешность найденного смещения, используя *второе приближение*.

Еще одна математическая подсказка:

*Если ускорение тела изменяется от времени по закону $a = bt^2$, то зависимость скорости от времени имеет вид $v = \frac{bt^3}{3}$, при этом зависимость координаты от времени $x = \frac{bt^4}{12}$. Предполагается, что начальная скорость и начальная координаты равны нулю.



Часть 3. Кулоновская сила.

Частицу поместили между обкладками сферического конденсатора. Конденсатор образован двумя концентрическими проводящими сферами, радиусы которых равны r_1, r_2 . Сначала частица касается внутренней сферы и находится в покое, затем на короткий промежуток

времени τ обкладки подключают к источнику постоянного напряжения U_0 . При этом тело приходит в движение.

3.1 Чему равна напряженность поля у поверхности внутренней сферы E_0 ?

3.2 Выразите напряженность поля в точке $E(r)$, находящейся между сферами на расстоянии r от их центра, через величину E_0 и геометрические размеры конденсатора. В дальнейших пунктах ответы выражайте через значение E_0 .

3.3 Найдите скорость частицы после выключения поля во втором приближении v_0

3.4 Используя первое приближение, найдите время пролета частицы между обкладками конденсатора $\tilde{T}$. Во втором приближении время движения может быть представлено в виде $T = \tilde{T} + \beta\tau^n$, где β - некоторая константа. Чему равен порядок степени поправки n ? Доказывать приведенную формулу и определять коэффициент β не требуется.

Решение

Задача 10-2 Короткий толчок

Часть 1. Постоянная сила.

1.1 Сил, действующая на частицу, во время включения поля, равна

$$F = qE \quad (1)$$

Так как начальная скорость частицы равна нулю, поэтому уравнение теоремы об изменении импульса имеет вид

$$mv_0 = qE\tau. \quad (2)$$

Из этого уравнения находим скорость частицы

$$v_0 = \frac{qE}{m}\tau. \quad (3)$$

График этой зависимости показан на рисунке.



1.2 Уравнение теоремы о кинетической энергии имеет вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = qEx. \quad (4)$$



Так как движение тела является равноускоренным, то смещение тела за время действия поля τ равно

$$x_0 = \frac{qE}{2m} \tau^2. \quad (5)$$

Подставляя это выражение в формулу (4), получаем значение скорости

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{qE}{m} \left(\frac{qE}{2m} \tau^2 \right)} = \frac{qE}{m} \tau \quad (6)$$

График зависимости скорости от координаты показан на рисунке.

1.2 Полученные формулы полностью совпадают.

Примечание. Формулы совпадают, так обе получены безо всяких приближений.

Часть 2. Сила упругости.

2.1 Пренебрежение смещением частицы за время действия поля равносильно пренебрежением силы упругости. Поэтому в этом приближении скорость частицы описывается тоже формулой, что и в Части 1:

$$\tilde{v}_0 = \frac{qE}{m} \tau. \quad (7)$$

2.2 В начальный момент времени ускорение частицы определяется только электрическим полем, поэтому в используемом приближении закон движения частицы описывается формулой

$$x = \frac{qE}{2m} t^2 \quad (8)$$

Тогда уравнение (1) в указанном приближении сводится к виду

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = qE - kx \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{qE}{m} - \frac{k}{m} \cdot \left(\frac{qE}{2m} \tau^2 \right). \quad (9)$$

Используя математическую подсказку, легко получить выражение для скорости частицы сразу после выключения поля:

$$v_0 = \frac{qE}{m} \tau - \frac{kqE}{6m^2} \tau^3 = \frac{qE}{m} \tau \left(1 - \frac{1}{6} \frac{k}{m} \tau^2 \right) \quad (10)$$

2.3 Относительная погрешность значения скорости, найденного в первом приближении, равна

$$\varepsilon_v = \frac{v_0 - \tilde{v}_0}{\tilde{v}_0} = -\frac{1}{6} \frac{k}{m} \tau^2. \quad (11)$$

2.4 Запишем уравнение, следующее из теоремы о кинетической энергии, выразим из него значение искомой скорости

$$\frac{mv_0^2}{2} = qEx - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2\frac{qE}{m}x - \frac{k}{m}x^2} \quad (12)$$

Подставляя значение координаты в момент выключения поля (8), получим

$$v_0 = \sqrt{2\frac{qE}{m}x - \frac{k}{m}x^2} = \sqrt{2\frac{qE}{m}\left(\frac{qE}{2m}\tau^2\right) - \frac{k}{m}\left(\frac{qE}{2m}\tau^2\right)^2} = \frac{qE}{m}\tau\sqrt{1 - \frac{1}{4}\frac{k}{m}\tau^2}. \quad (13)$$

2.5 Наконец, используем приближенную формулу (для корня $\gamma = \frac{1}{2}$):

$$v_0 = \frac{qE}{m}\tau\sqrt{1 - \frac{1}{4}\frac{k}{m}\tau^2} \approx \frac{qE}{m}\tau\left(1 - \frac{1}{8}\frac{k}{m}\tau^2\right). \quad (14)$$

2.6 Полученные формулы (10) и (14) имеют одинаковую структуру, но отличаются коэффициентом относительной погрешности. Можно показать, что правильной формулой является формула (10). Для этого достаточно проанализировать порядок малых поправок. Поправка к скорости, учитывающая смещение тела, равна 3 (т.е. пропорциональна τ^3), поэтому поправка к смещению должна быть пропорциональна τ^4 . Следовательно, в формуле (13) величина x должна быть рассчитана с точностью до 4 порядка.

Примечания для скептиков.

1. Докажем последнее утверждение. Если зависимость скорости от времени имеет вид (10):

$$v_0 = \frac{qE}{m}\tau - \frac{kqE}{6m^2}\tau^3;$$

то смещение, рассчитанное в рамках того же приближения, равно

$$x = \frac{qE}{2m}\tau^2 - \frac{kqE}{24m^2}\tau^4.$$

Подставим это выражение в формулу (13) и проведем разложение (оставляя все слагаемые 4 порядка), в результате чего получим

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2\frac{qE}{m}x - \frac{k}{m}x^2} = \sqrt{2\frac{qE}{m}\left(\frac{qE}{2m}\tau^2 - \frac{kqE}{24m^2}\tau^4\right) - \frac{k}{m}\left(\frac{qE}{2m}\tau^2\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{qE}{m}\tau\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{qE}{m}\tau\right)^2\left(\frac{k}{m}\tau^2\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{qE}{m}\tau\right)^2\left(\frac{k}{m}\tau^2\right)} = \\ &= \frac{qE}{m}\tau\sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{k}{m}\tau^2\right)} \approx \frac{qE}{m}\tau\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{m}\tau^2\right)\right) \end{aligned}$$

А эта формула полностью совпадает с выражением (10).

2. Уравнение (10) имеет точное решение (так является уравнением гармонических колебаний).

С учетом начальных условий это решение задается функцией

$$ma = qE - kx \Rightarrow x(t) = \frac{qE}{k}(1 - \cos \omega t),$$

Где обозначено $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - круговая частота гармонических колебаний частицы на пружине. Используя разложение косинуса $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$, эта функция представляется в виде

$$x(t) = \frac{qE}{k}(1 - \cos \omega t) \approx \frac{qE}{k} \left(\frac{1}{2}(\omega t)^2 - \frac{1}{24}(\omega t)^4 \right)$$

Что полностью совпадает с решением, полученным приближенным методом. Из уравнения (10) следует, что зависимость скорости от времени во втором приближении имеет вид

$$v = \frac{qE}{m}t - \frac{kqE}{6m^2}t^3 \quad (10^*)$$

Тогда в соответствии с математической подсказкой зависимость координаты от времени будет описываться функцией

$$x = \frac{qE}{m} \frac{t^2}{2} - \frac{kqE}{6m^2} \cdot \frac{t^4}{4} = \frac{qE}{2m}t^2 \left(1 - \frac{1}{12} \frac{k}{m} t^2 \right) \quad (11^*)$$

2.7 Отсюда следует, что смещение в первом приближении равно

$$\tilde{x} = \frac{qE}{2m}\tau^2 \quad (12^*)$$

2.8 Относительная поправка во втором приближении задается формулой

$$\varepsilon = -\frac{1}{12} \frac{k}{m} \tau^2. \quad (13^*)$$

Часть 3. Кулоновская сила.

3.1 Напряженность поля необходимо выразить через заданное значение напряжения (разности потенциалов) U_0 . Электрическое поле между обкладками сферического конденсатора эквивалентно полю точечного заряда, помещенного в центр сфер. Поэтому разность потенциалов и напряженность поля описываются формулами

$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (15)$$

Из которых не сложно получить зависимость напряженности поля от расстояния r

$$E(r) = U \frac{r_2 \cdot r_1}{r_2 - r_1} \frac{1}{r^2}. \quad (16)$$

Напряженность поля у поверхности внутренней сферы равна

$$E_0 = E(r = r_1) = U \frac{r_2 \cdot r_1}{r_2 - r_1} \frac{1}{r_1^2} = \frac{U}{r_1} \frac{r_2}{r_2 - r_1}. \quad (17)$$

3.2 Наконец выражение для напряженности поля в произвольной точке имеет вид

$$E(r) = E_0 \frac{r_1^2}{r^2}. \quad (18)$$

3.3 Так как поле включают на малый промежуток времени τ , то и смещение частицы за этот промежуток времени будет мало. Поэтому представим $r = r_1 + x$, причем $x \ll r_1$. Тогда вблизи поверхности внутренней сферы напряженность поля может быть описана приближенной формулой

$$E(r) = E_0 \frac{r_1^2}{(r_1 + x)^2} = E_0 \left(1 + \frac{x}{r_1}\right)^{-2} \approx E_0 \left(1 - 2\frac{x}{r_1}\right). \quad (19)$$

Тогда уравнение движения тела в течение промежутка времени τ имеет вид

$$ma = qE = qE_0 - \frac{2qE_0}{r_1}x. \quad (20)$$

Это уравнение полностью совпадает с рассмотренным уравнением (9), в котором следует положить $k = \frac{2qE_0}{r_1}$. Скорость, которую приобретает тело за время включения поля, описывается формулой (10)

$$v_0 = \frac{qE_0}{m}\tau \left(1 - \frac{1}{6}\frac{k}{m}\tau^2\right) = \frac{qE_0}{m}\tau \left(1 - \frac{1}{3}\frac{qE_0}{mr_1}\tau^2\right) \quad (20)$$

В первом приближении время движения частицы между обкладками описывается формулой

$$\tilde{T} = \frac{r_2 - r_1}{\tilde{v}_0} = \frac{m(r_2 - r_1)}{qE_0\tau}. \quad (21)$$

Для определения порядка погрешности обозначим $\frac{qE_0}{m} = a$ — ускорение, с которым разгонялась частица. Тогда время движения во втором приближении можно записать в виде:

$$T = \tau + \frac{(r_2 - r_1) - \frac{a}{2}\tau^2}{a\tau \left(1 - \frac{1}{3}\frac{a}{r_1}\tau^2\right)}. \quad (22)$$

Упростим эту формулу, учитывая малость времени τ :

$$\begin{aligned} T &= \tau + \frac{(r_2 - r_1) - \frac{a}{2}\tau^2}{a\tau \left(1 - \frac{1}{3}\frac{a}{r_1}\tau^2\right)} = \frac{(r_2 - r_1)}{a\tau} \frac{1 - \frac{a}{2(r_2 - r_1)}\tau^2}{1 - \frac{1}{3}\frac{a}{r_1}\tau^2} + \tau \approx \\ &\approx \frac{(r_2 - r_1)}{a\tau} \left(1 - \frac{a}{2(r_2 - r_1)}\tau^2 + \frac{1}{3}\frac{a}{r_1}\tau^2\right) + \tau = \tilde{T} + \beta\tau \end{aligned} \quad (23)$$

Из этого выражения видно, что порядок поправки — первый, т.е. $n = 1$.

Этот же результат можно получить из простых рассуждений. Во втором приближении все относительные поправки имеют второй порядок, поэтому и относительная погрешность формулы для расчета времени движения также имеет второй порядок. Так как время движения обратно пропорционально τ , то абсолютная погрешность должна иметь первый порядок:

$$\frac{\Delta T}{\tilde{T}} \propto \tau^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta T \propto \tilde{T}\tau^2 = \frac{\Delta r}{a\tau}\tau^2 \propto \tau. \quad (24)$$