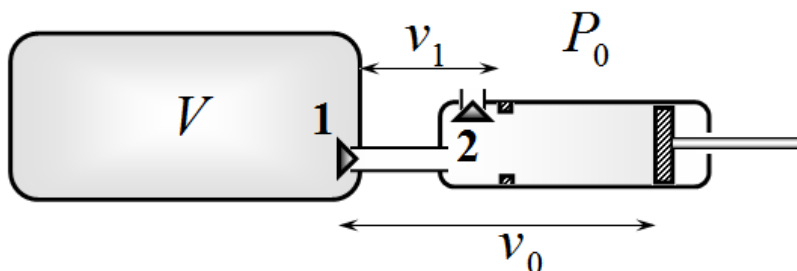


Условие

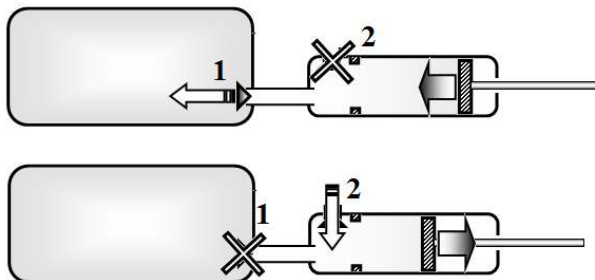
Задача 10-3 Насос



Поршневой насос состоит из цилиндрического сосуда с подвижным поршнем, соединенным с электромотором (на рисунке не показан). К цилиндру подключены два клапана 1 и 2. Каждый клапан можно считать идеальным: он пропускает газ (без сопротивления) в одну сторону и полностью перекрывает поток при изменении его направления. Насос подключают к сосуду, объем которого равен V . Электродвигатель заставляет поршень периодически перемещаться от начального положения (когда объем камеры равен v_0), до конечного положения (в котором объем камеры равен v_1) и обратно.

Численные значения параметров установки следующие: - объем сосуда $V = 20,00$ л; - полный объем камеры насоса $v_0 = 1,00$ л; - объем камеры при вдвинутом поршне («мертвое» пространство) $v_1 = 0,20$ л; - атмосферное давление $P_0 = 1,0 \text{ атм} = 1,0 \cdot 10^5$ Па;

Насос работает медленно, поэтому все процессы следует считать изотермическими. Трением и вязкостью воздуха можно пренебречь.



Часть 1. Накачка.

Для накачивания воздуха в сосуд клапаны устанавливают так, чтобы клапан 1 открывается, когда газ входит в сосуд (естественно, когда давление в камере насоса незначительно превышает давление в сосуде) и закрывается, не давая газу выходить из сосуда. Клапан два соединяет камеру насоса с атмосферой, он не дает выходить воздуху из камеры насоса и открывается, когда давление в камере насоса становится чуть ниже атмосферного давления. Обозначим P_k - давление в сосуде после k циклов работы насоса.

1.1 После совершения k циклов работы насоса давление в сосуде поднялось до значения P_k . Постройте схематический график процессов в камере насоса на диаграмме (P, v) , где P, v - давление и объем газа в камере. Началом цикла считайте положение полностью выдвинутого поршня (v_0) и давления в камере P_0

Запишите уравнения всех процессов $P(V)$, укажите начальные и конечные значения параметров газа на каждом участке цикла. Все результаты (в виде формул) занесите в таблицу 1.

Таблица 1. Цикл накачки.

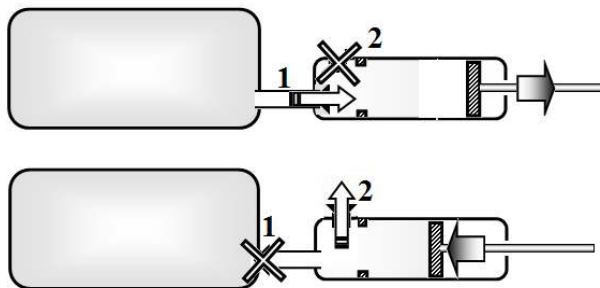
Процесс	Начальное состояние		Уравнение процесса	Конечное состояние	
	Объем	Давление		Объем	Давление
1 → 2					
2 → 3					
...					

1.2 Перед началом работы насоса давление в сосуде равно атмосферному давлению P_0 . На бланке 1 постройте графики двух первых циклов. Оцифровку оси давления проведите самостоятельно. В таблице укажите численные значения параметров в вершинах цикла. 1.3 Пусть давление в сосуде после k циклов равно $P_k = 2,0$ атм. На бланке 2 постройте график одного следующего цикла. Оцифровку оси давления проведите самостоятельно, она может отличаться от оцифровки предыдущего графика. В таблице укажите численные значения параметров в вершинах цикла. 1.4 Покажите, что давление в сосуде после k циклов P_k , может быть выражено через давление после $(k - 1)$ цикла P_{k-1} с помощью рекуррентной формулы

$$P_k = \gamma P_{k-1} + a, \quad (1)$$

Где γ, a - постоянные величины. Выразите значения параметров γ, a через характеристики установки v_0, v_1, V и атмосферное давление P_0 . 1.5 Найдите, до какого максимального давления $\bar{P}$ можно поднять давление в сосуде. 1.6 Обозначим $\delta_k = \bar{P} - P_k$ - отклонение давления в сосуде после k циклов от максимально возможного. Выразите величину δ_k через δ_{k-1} и параметры γ, a из формулы (1). 1.7 Получите формулу, описывающую в явном виде давление в сосуде P_k в зависимости от числа совершенных циклов k . Постройте схематический график этой зависимости. 1.8 Рассчитайте, сколько циклов должен совершить насос, чтобы давление в сосуде достигло значения $0,95\bar{P}$.

Часть 2. Откачка. Насос может, как накачивать воздух в сосуд, так и откачивать его из сосуда. Для этого только необходимо изменить направление пропускания клапанов (см. рис).



2.1 Пусть после k циклов давление в сосуде опустилось до значения P_k . Постройте схематический график цикла откачки воздуха из сосуда (P, v) , где P, v - давление и объем газа в камере. Началом цикла считайте положение полностью задвинутого поршня (v_1) и давление в камере насоса P_0 . Запишите уравнения всех процессов $P(V)$, укажите начальные и конечные значения параметров газа на каждом участке цикла. Все результаты (в виде формул) занесите в Таблицу 2, аналогичную Таблице 1.

2.2 Получите формулу, описывающую давление в сосуде P_k в зависимости от числа совершенных циклов k .

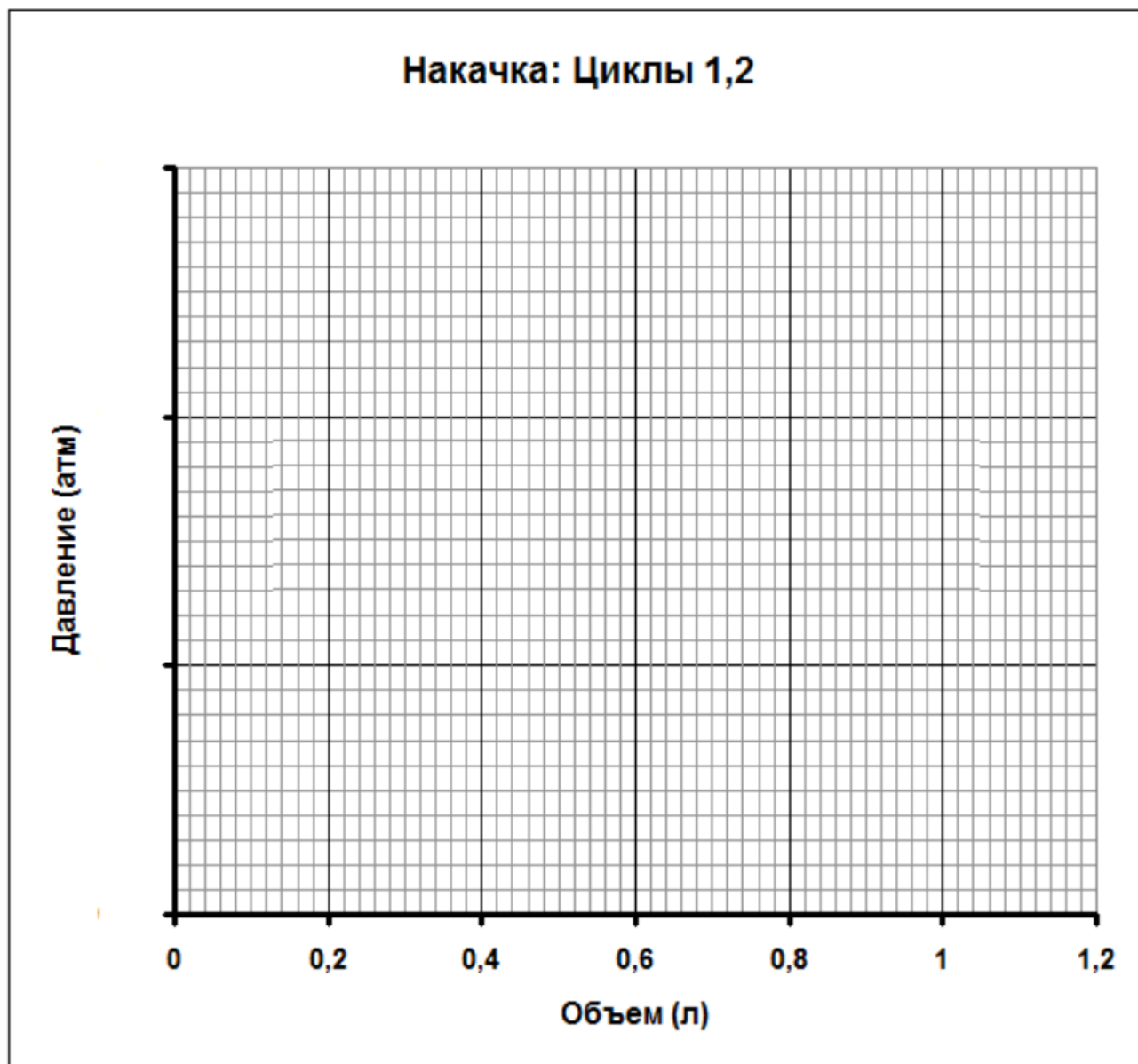
2.3 Рассчитайте, до какого значения понизится давление в сосуде после 50 циклов работы насоса. 2.4 До какого минимального значения можно понизить давление в сосуде?

Бланк к задаче 10-3 «Насос»

Циклы 1, 2

Таблица состояний.

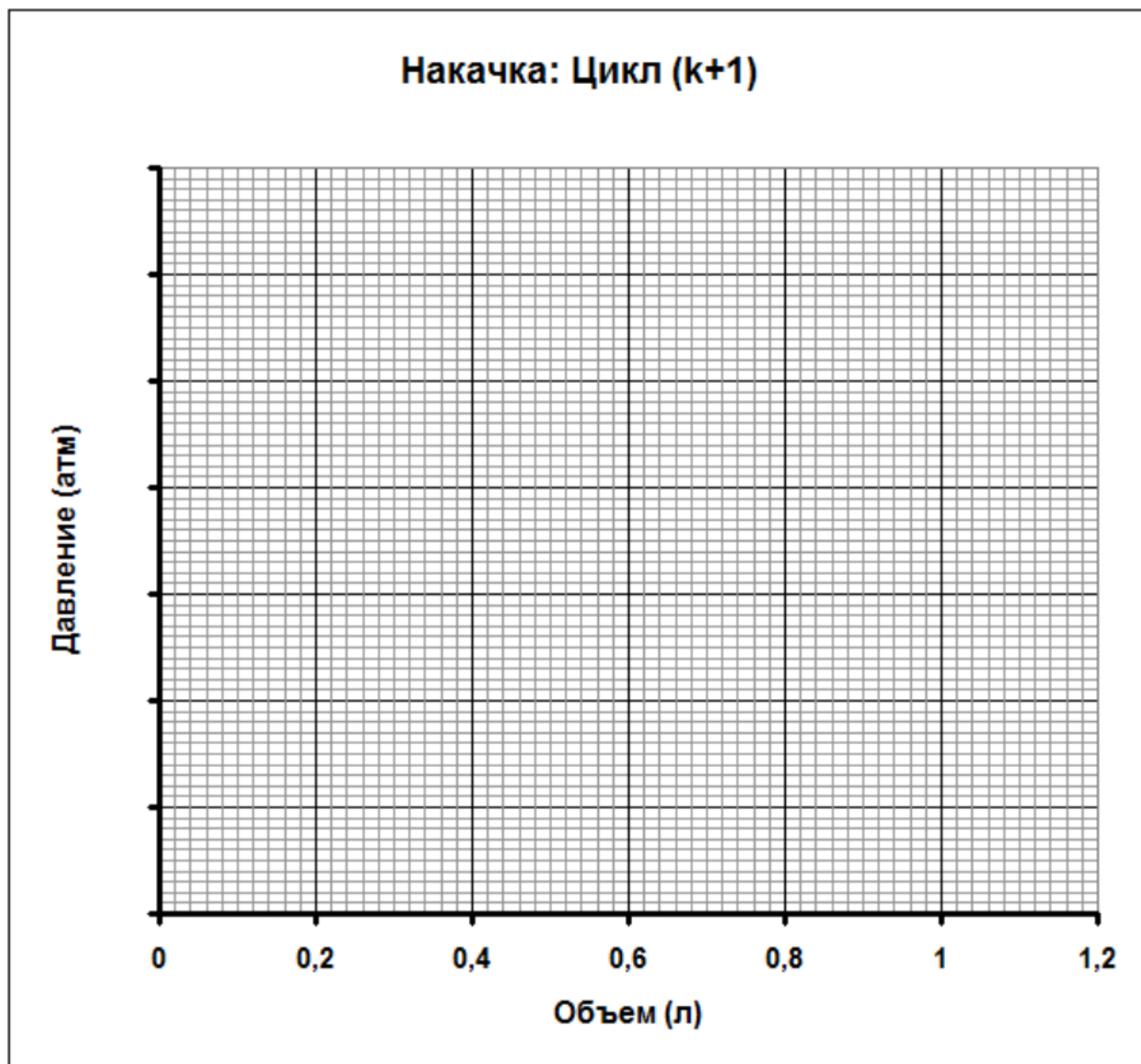
Точка	Объем v (л)	Давление P (атм.)
Цикл 1		
Цикл 2		



****Цикл $(k + 1)$ ****

Таблица состояний.

Точка	Объем v (л)	Давление P (атм.)
-------	---------------	---------------------



Решение

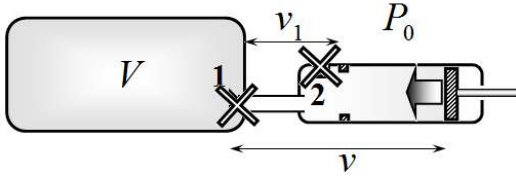
Задача 10-3 Насос

Часть 1. Накачивание воздуха.

1.1 В начальном состоянии положении (точка 1) поршень находится в крайнем правом положении, объем газа - v_0 , давление P_0 .

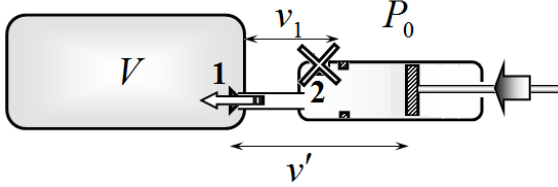
Поршень начинает двигаться влево, сжимая газ в камере. Пока давление газа в камере насоса не достигнет давления газа в сосуде, оба клапана будут закрыты, поэтому процесс сжатия будет описываться уравнением

$$P_0 v_0 = P v \quad \Rightarrow \quad P = \frac{P_0 v_0}{v}. \quad (1)$$



Давление газа в камере достигнет значения давления в сосуде P_k , когда объем уменьшится до значения v' (точка 2), которое определяется выражением

$$P_k = \frac{P_0 v_0}{v'} \Rightarrow v' = \frac{P_0 v_0}{P_k}. \quad (2)$$



После этого откроется клапан 1 и газ начнет поступать в сосуд.

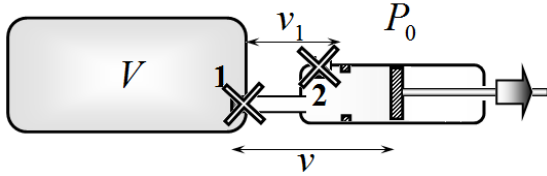
На этом участке происходит сжатие газа в объеме сосуда и камеры насоса, поэтому описывается уравнением

$$P_k(V + v') = P(V + v) \Rightarrow P = P_k \frac{V + v'}{V + v}. \quad (3)$$

Такое сжатие будет продолжаться до тех пор, пока поршень не достигнет крайнего левого положения (точка 3), в котором объем газа в камере насоса равен v_1 , давление достигнет значения

$$P_{k+1} = P_k \frac{V + v'}{V + v_1} = P_k \frac{V}{V + v_1} + \frac{P_k v'}{V + v_1} = P_k \frac{V}{V + v_1} + P_0 \frac{v_0}{V + v_1}. \quad (4)$$

Это же давление будет и в сосуде, на остальных участках цикла оно изменяться не будет.

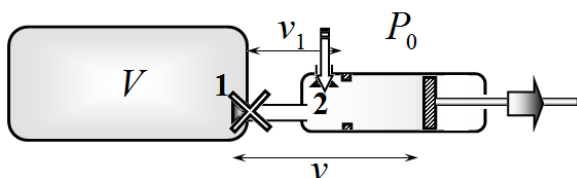


На следующем этапе поршень начинает обратное движение (вправо), при этом оба клапана опять оказываются закрытыми, пока давление в камере насоса не опустится до атмосферного давления. На этом участке уравнение процесса имеет вид

$$P_{k+1} v_1 = P v \Rightarrow P = \frac{P_{k+1} v_1}{v} \quad (5)$$

Давление в камере насоса станет равным атмосферному, когда объем газа увеличится до значения v'' , которое определяется формулой

$$P_0 = \frac{P_{k+1} v_1}{v''} \Rightarrow v'' = \frac{P_{k+1} v_1}{P_0}. \quad (6)$$

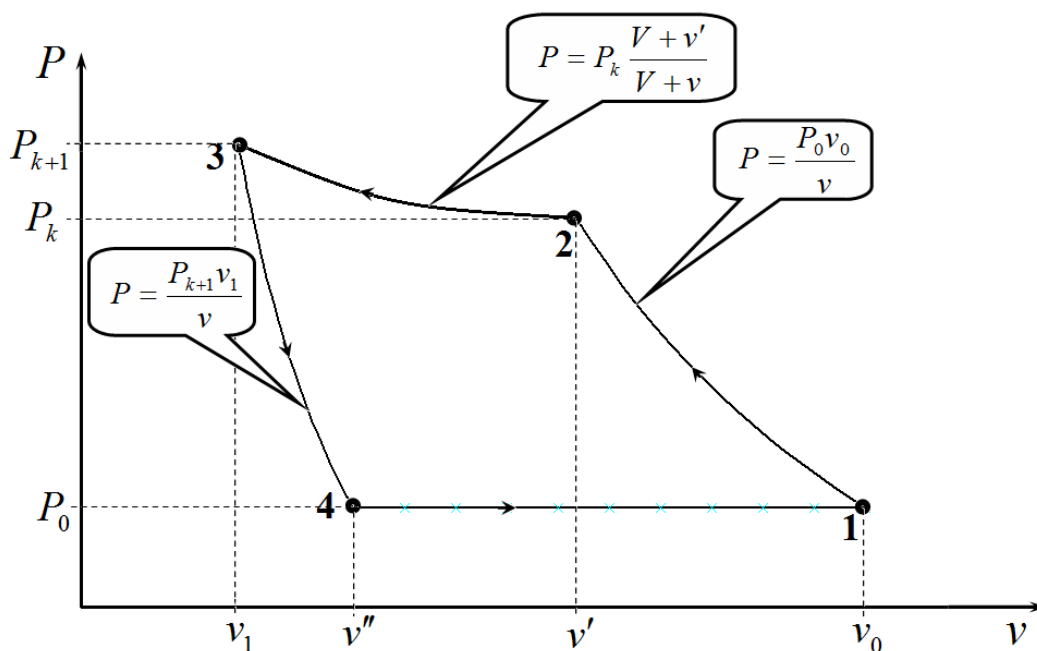


При дальнейшем смещении поршня откроется клапан 2 и атмосферный воздух будет поступать в камеру насоса, при этом давление воздуха в камере насоса будет оставаться равным атмосферному $P = P_0$.

Для наглядности все характеристики цикла сведены в таблицу и показаны на графике.

Цикл наработки.

Процесс	Начальное состояние	Давление	Уравнение процесса	Конечное состояние	Давление
	Объем	Давление		Объем	Давление
1-2	v_0	P_0	$P = \frac{P_0 v_0}{v}$	$v' = \frac{P_0 v_0}{P_k}$	P_k
2-3	v'	P_k	$P = P_k \frac{V+v'}{V+v}$	v_1	$P_{k+1} = P_k \frac{V}{V+v_1} + \frac{P_0 v_0}{V+v_1}$
3-4	v_1	P_{k+1}	$P = \frac{P_{k+1} v_1}{v}$	$v'' = \frac{P_{k+1} v_1}{P_0}$	P_0
4-1	v''	P_0	$P = P_0$	v_0	P_0

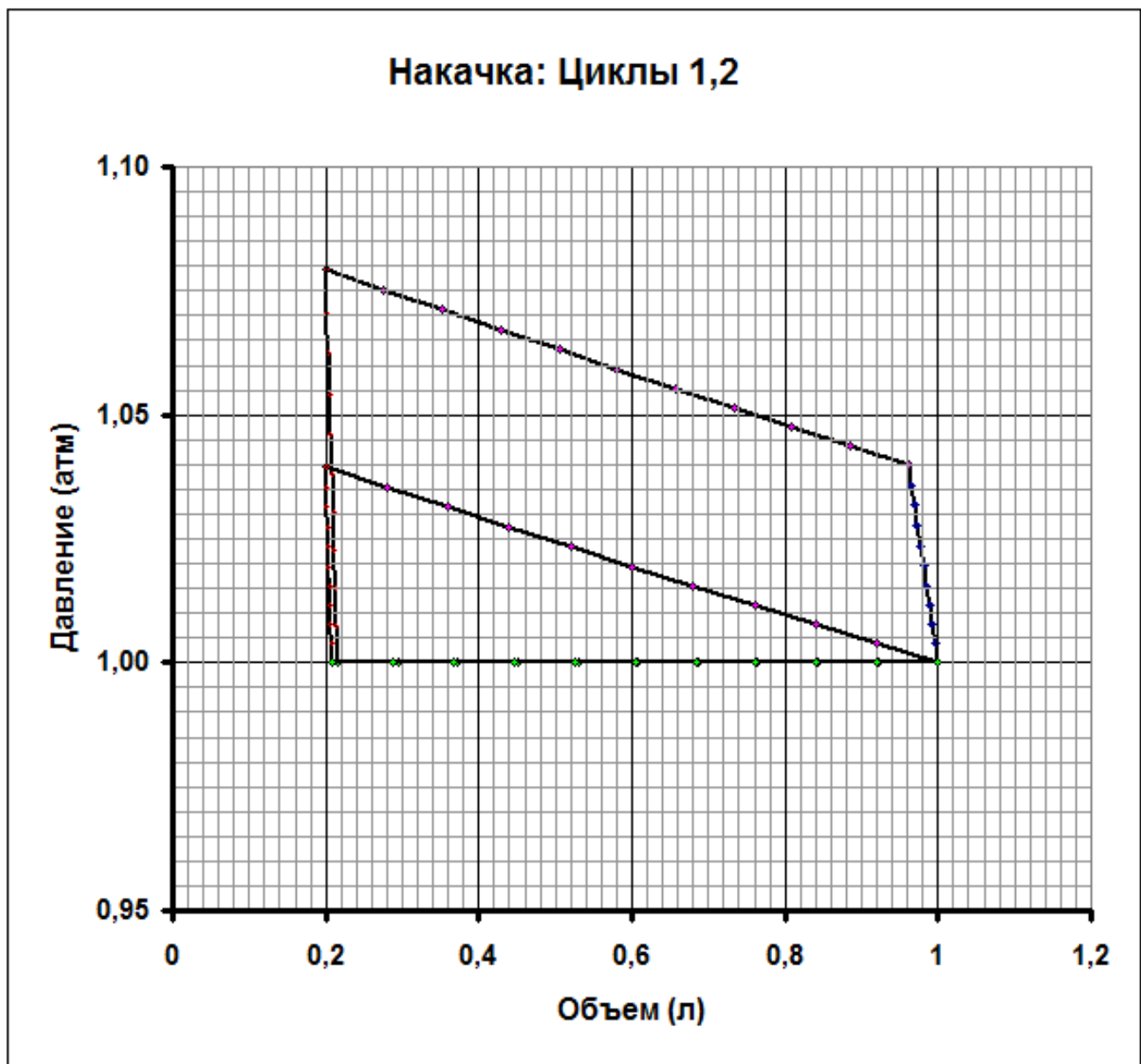


1.2 – 1.3 Расчеты параметров требуемых циклов, проведенные по формулам таблицы 1 приведены в соответствующих таблицах и на графиках.

Циклы 1, 2

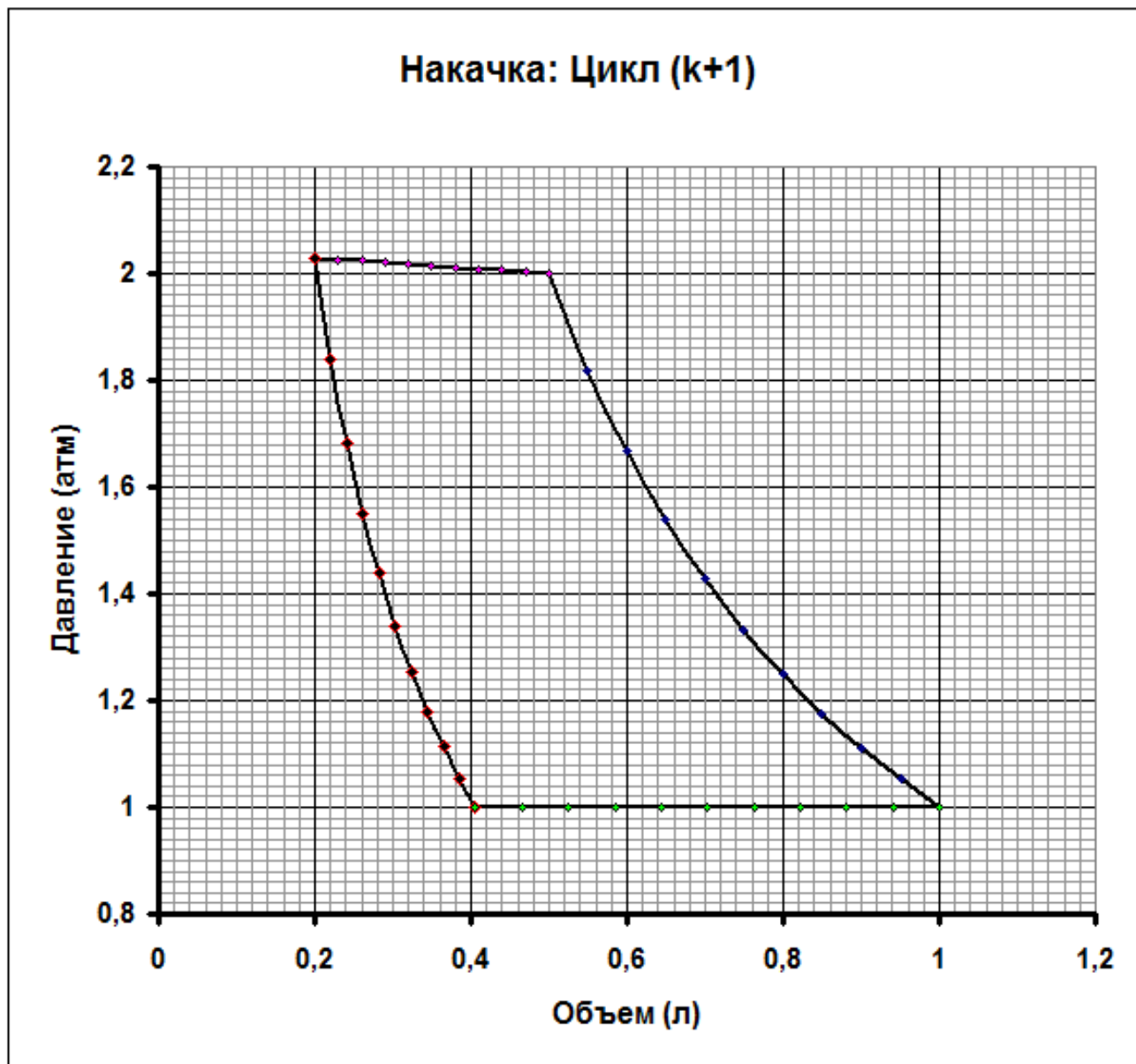
Таблица состояний.

Точка	Объем v (л)	Давление P (атм.)
Цикл 1		
1	1,00	1,00
2	1,00	1,00
3	0,20	1,04
4	0,21	1,00
Цикл 2		
1	1,00	1,00
2	0,96	1,04
3	0,20	1,08
4	0,22	1,00



****Цикл $(k + 1)$ ****
Таблица состояний.

Точка	Объем v (л)	Давление P (атм.)
1	1,00	1,00
2	0,50	2,00
3	0,20	2,03
4	0,41	1,00



1.4 Фактически требуемая формула получена в пункте 1.1 – формула (4):

$$P_{k+1} = P_k \frac{V}{V + v_1} + P_0 \frac{v_0}{V + v_1}. \quad (4')$$

Из сравнения с формулой, приведенной в условии ($P_k = \gamma P_{k-1} + a$), следует, что ее параметры задаются формулами

$$\gamma = \frac{V}{V + v_1} \quad (7)$$

$$a = P_0 \frac{v_0}{V + v_1} \quad (8)$$

1.5 Предельное давление может быть найдено как путем чисто физических рассуждений, так и формально математически. Физические рассуждения. Максимально возможное сжатие воздуха в камере насоса достигается, когда поршень приходит в крайнее левое положение, а при этом клапан сосуда еще не открывается. В этом случае из выражения (1) следует формула для максимального давления

$$\bar{P} = P_0 \frac{v_0}{v_1}. \quad (9)$$

Формально математически этот же результат можно получить из рекуррентной формулы, полагая в ней, что давление перестало изменяться, т.е. $P_{k+1} = P_k = \bar{P}$. В этом случае получаем

$$\bar{P} = \gamma \bar{P} + a \Rightarrow \bar{P} = \frac{a}{1 - \gamma} = P_0 \frac{v_0}{v_1}. \quad (9')$$

1.6 Из обозначения $\delta_k = \bar{P} - P_k$ выразим значение давления $P_k = \bar{P} - \delta_k$ и подставим в рекуррентную формулу

$$\bar{P} - \delta_k = \gamma(\bar{P} - \delta_{k-1}) + a. \quad (10)$$

С учетом выражения (9'), получаем, что

$$\delta_k = \gamma \delta_{k-1} \quad (11)$$

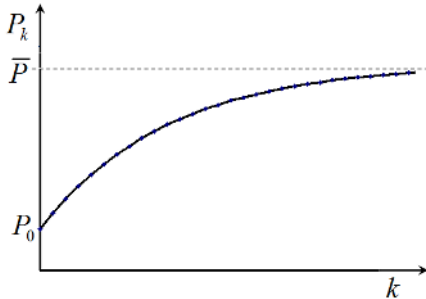
1.7 Формула (11), указывает, что величины δ_k образуют геометрическую прогрессию, поэтому

$$\delta_k = \delta_0 \gamma^k \quad (12)$$

С помощью обратной подстановки $P_k = \bar{P} - \delta_k$ получим

$$P_k = \bar{P} - \delta_0 \gamma^k = P_0 \frac{v_0}{v_1} - \left(P_0 \frac{v_0}{v_1} - P_0 \right) \left(\frac{V}{V + v_1} \right)^k. \quad (13)$$

График этой зависимости имеет вид кривой, монотонно стремящейся к предельному значению.



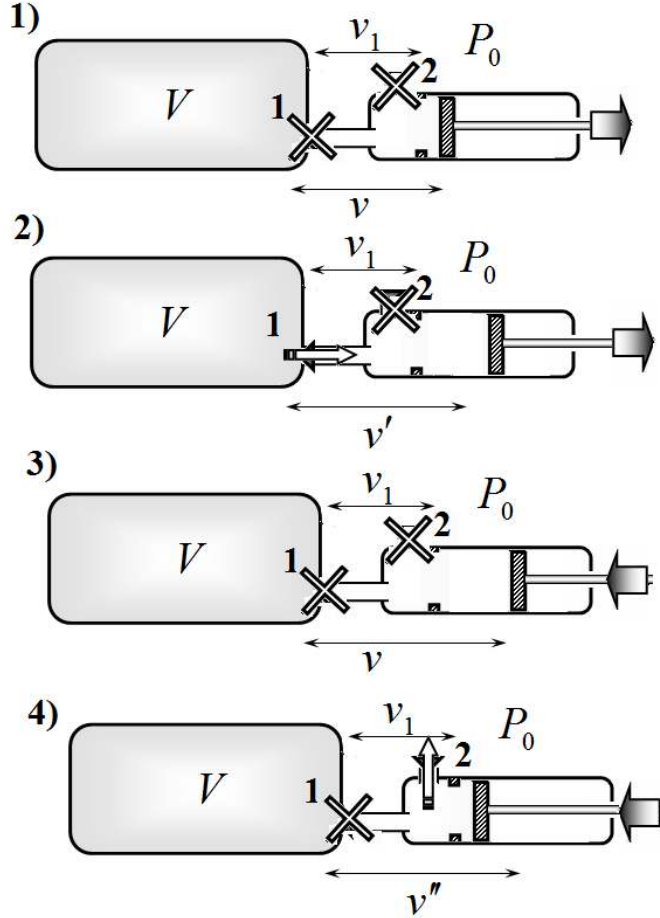
1.8 для расчета числа циклов удобно воспользоваться формулой (12). Проведем численный расчет ее параметров: - знаменатель прогрессии $\gamma = \frac{V}{V + v_1} = \frac{20,00}{20,20} = 0,990$; - максимальное давление $\bar{P} = P_0 \frac{v_0}{v_1} = 5,00 P_0$; - начальное отклонение $\delta_0 = \bar{P} - P_0 = 4,00 P_0$; - конечное отклонение $\delta_k = \bar{P} - 0,95 \bar{P} = 0,25 P_0$.

Теперь из формулы (12) найдем

$$\delta_k = \delta_0 \gamma^k \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{\delta_k}{\delta_0}}{\ln \gamma} = 276 \approx 280. \quad (14)$$

Часть 2. Откачка.

2.1 Решение этой части полностью аналогично решению первой части задачи, поэтому приведем его кратко.

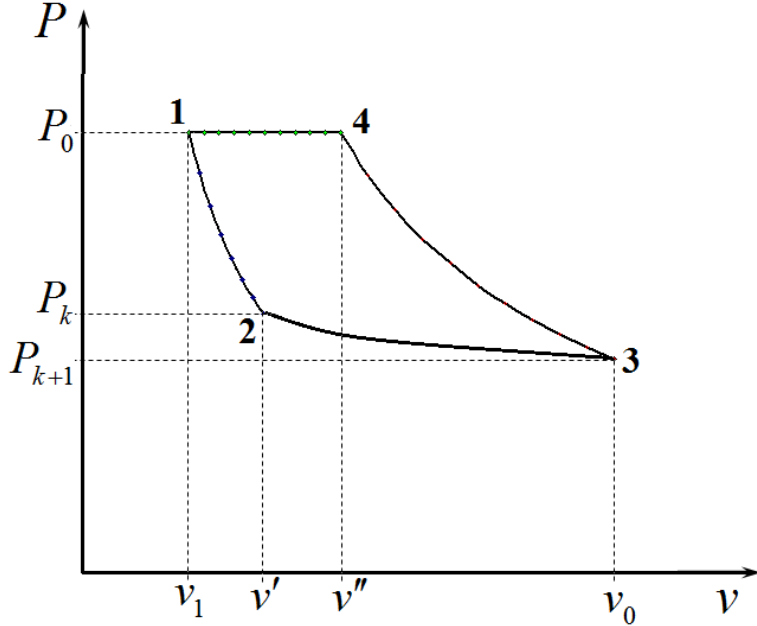


Цикл откачки также состоит из четырех этапов. В соответствии с условием начнем с состояния, когда поршень находится в крайнем левом положении (давление в этом состоянии равно атмосферному) и начинает двигаться вправо. При этом оба клапана закрыты: газ в камере насоса расширяется, давление падает. Когда давление в камере становится равным давлению в сосуде, открывается клапан 1 и газ частично начинает выходить из сосуда. Поршень смещается в крайнее правое положение и начинает возвращаться обратно, при этом клапан 1 закрывается. Давление в камере растет и когда достигает атмосферного открывается клапан 2 и газ частично выбрасывается в атмосферу. Эти стадии показаны на рисунке, начальные, конечные значения параметров газа в камере насоса и уравнения процессов приведены в Таблице 2. Схематическая диаграмма цикла показана на рисунке.

Таблица 2. Цикл откачки.

Процесс	Начальное состояние		Уравнение процесса	Конечное состояние	
	Объем	Давление		Объем	Давление
1-2	v_1	P_0	$P = \frac{P_0 v_1}{v}$	$v' = \frac{P_0 v_1}{P_k}$	P_k
2-3	v'	P_k	$P = P_k \frac{V+v'}{V+v}$	v_0	$P_{k+1} = P_k \frac{V+v'}{V+v_0}$
3-4	v_0	P_{k+1}	$P = \frac{P_{k+1} v_0}{v}$	$v'' = \frac{P_{k+1} v_0}{P_0}$	P_0
4-1	v''	P_0	$P = P_0$	v_1	P_0

Диаграмма цикла откачки.



2.2 Уменьшение давления в сосуде происходит на 3 этапе цикла откачки, уравнение процесса на этом этапе позволяет получить рекуррентное соотношение, связывающее давления до и после очередного цикла

$$P_{k+1} = P_k \frac{V + v'}{V + v_0}. \quad (15)$$

Подставляя значения для объема v' (при котором начинается выход газа из сосуда), получим

$$P_{k+1} = P_k \frac{V + v'}{V + v_0} = P_k \frac{V + \frac{P_0 v_1}{P_k}}{V + v_0} = P_k \frac{V}{V + v_0} + P_0 \frac{v_1}{V + v_0}. \quad (16)$$

Это соотношение полностью аналогично соотношению (4'), проанализированному в первой части задачи. Поэтому можно переписать полученные ранее решения, только при этом надо поменять местами значения объемов v_0 и v_1 . Тогда зависимость давления в камере от числа проведенных циклов опишется формулой, аналогичной формуле (13):

$$P_k = P_0 \frac{v_1}{v_0} - P_0 \left(\frac{v_1}{v_0} - 1 \right) \left(\frac{V}{V + v_0} \right)^k \quad (17)$$

2.3 Подстановка численных значений параметров в эту формулу и последующий расчет дает значение давления в камере после 50 циклов откачки:

$$P_{50} = P_0 \left(\frac{v_1}{v_0} - \left(\frac{v_1}{v_0} - 1 \right) \left(\frac{V}{V + v_0} \right)^k \right) = P_0 \left(0,20 + 0,80 \cdot \left(\frac{20}{21} \right)^{50} \right) = 0,27 \text{ атм.} \quad (18)$$

2.4 Предельное минимальное значение давления воздуха в сосуде равно.

$$P_k = P_0 \frac{v_1}{v_0} = 0,20 \text{ атм.} \quad (19)$$