

Условие

Задача 11-3 Преломление... звука

Так как и звук, и свет являются волнами (конечно, разной природы), то законы распространения звука и света аналогичны. Например, в однородных средах и свет, и звук распространяются прямолинейно; преломление световых и звуковых лучей подчиняется закону Снеллиуса и т.д.

Часть 1. Скорость звука в воздухе.

Скорость звука в газе (молярная масса которого равна M) зависит от давления P и плотности газа ρ по формуле, которую можно представить в виде

$$c = AP^\alpha \rho^\beta \quad (1)$$

Здесь A - безразмерный коэффициент пропорциональности.

1.1 Используя метод размерностей, определите показатели степеней α, β в этой формуле. 1.2 Найдите зависимость скорости звука в газе от абсолютной температуры T . Считайте, что коэффициент A в формуле (1) известен. 1.3 Пусть скорость звука при температуре T_0 равна c_0 . Произвольную температуру представим в виде $T = T_0 + \Delta T$. Получите формулу для зависимости скорости звука от величины ΔT . В этой формуле все параметры должны быть точно известны.

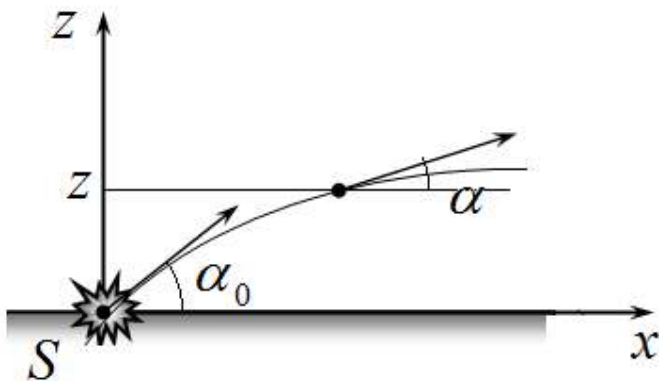
Часть 2. Распространение звука в неоднородно нагретой атмосфере.

Пусть температура воздуха изменяется с высотой z по закону

$$T = T_0 + \gamma z \quad (2)$$

Параметры этой зависимости считайте известными, параметр γ может быть как положительным, так и отрицательным.

При распространении звука в описанной атмосфере звуковые лучи слегка искривляются. Пусть источник звука S находится на поверхности земли, которую будем считать плоской. Совместим с этим источником начало системы координат (x, z) , как показано на рисунке. Рассмотрим звуковой луч, выходящий из источника под углом α_0 к горизонту.



2.1 Нарисуйте схематически семейство лучей, выходящих из источника в двух случаях: если параметр γ в формуле (2) положительный $\gamma > 0$; если он отрицательный $\gamma < 0$.

Далее будем считать, температура воздуха у поверхности земли равна $t_0 = 20^\circ\text{C}$ (при этой температуре скорость звука равна $c_0 = 340 \frac{\text{M}}{\text{c}}$) и уменьшается на 1°C при подъеме на каждые 100 метров.

2.2 Получите зависимость скорости звука от высоты при заданных условиях $c(z)$. Рассчитайте численные значения параметров в полученной формуле.

Математические подсказки. 1. При малом изменении температуры траекторию луча можно приближенно считать параболой, описываемой функцией $z(x)$. Кроме того, рассматриваются лучи, распространяющиеся под малыми углами α к горизонту. В этом приближении (с точностью до малых второго порядка α^2) справедливы приближенные формулы

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$$

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad (3)$$

2.3 Запишите в явном виде квадратичную функцию $z = f(z)$, график которой проходит через начало координат. **2.4** Выразите ее производную $f'(x)$ как функцию z .

В дальнейшем используйте полученное соотношение для описания траекторий лучей в квадратичном приближении.

2.5 Получите уравнение луча, выходящего из источника под углом α_0 к горизонту, используя квадратичное приближение. **2.6** На каком максимальном расстоянии от источника может слышать звук человек, уши которого находятся на высоте 2,0 м над поверхностью земли? Затуханием звука в воздухе можно пренебречь.

Часть 3. Не кричите против ветра!

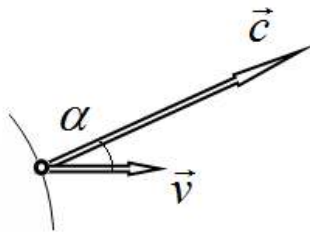
В данной части задачи температуру воздуха будем считать постоянной и равной $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Но над поверхностью земли дует постоянный ветер, скорость которого направлена горизонтально и возрастает с высотой по линейному закону

$$v(z) = v_0 + \beta z \quad (4)$$

Где $v_0 = 10 \frac{\text{M}}{\text{с}}$, $\beta = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{с}^{-1}$ - постоянные величины. Источник звука по-прежнему находится на поверхности земли, используйте прежнюю систему координат.

При распространении звука в движущемся воздухе скорость распространения звукового волнового фронта равна сумме скоростей звука в неподвижном воздухе c_0 и нормальной (к волновому фронту) составляющей скорости ветра $\vec{v}$

$$c = c_0 + v \cos \alpha \quad (5)$$



3.1 Нарисуйте схематически семейство звуковых лучей, распространяющихся от источника под разными углами как по ветру, так и против ветра. **3.2** Пусть звуковой луч на высоте z распространяется под углом α к горизонту. Получите уравнение, описывающее изменение угла α при малом изменении высоты Δz . **3.3** Получите функцию $z(x)$, описывающую траекторию луча, вышедшего под углом α_0 из источника в квадратичном приближении. Рассмотрите лучи, распространяющиеся по ветру и против ветра. **3.4** На основании вашего решения задачи, кратко сформулируйте основную причину того, что по ветру звук распространяется дальше, чем против ветра.

Решение

Задача 11-3 Преломление... звука

Часть 1. Скорость звука в воздухе.

1.1 Подставим размерности величин, входящих в формулу для скорости звука

$$c = AP^\alpha \rho^\beta \quad (1)$$

И запишем условия совпадения размерностей $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot [\text{кг}]^\alpha + \beta - \alpha - 3\beta - 2\alpha \cdot [-1] = 0$ мскгмс
(2) $[[2 \cdot 2]] [[3]]$ смм:

$$[\mathcal{M} \cdot c^{-1}] = \left[\frac{\kappa 2 \cdot \mathcal{M}}{c^2 \cdot \mathcal{M}^2} \right]^\alpha \left[\frac{\kappa 2}{\mathcal{M}^3} \right]^\beta = [\kappa 2]^{\alpha+\beta} [\mathcal{M}]^{-\alpha-3\beta} [c]^{-2\alpha} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ -\alpha - 3\beta &= 1 \\ -2\alpha &= -1 \end{aligned} \quad (3)$$

Решение этой системы имеет вид

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = -\alpha = -\frac{1}{2}. \quad (4)$$

Следовательно, формула для скорости звука следующая:

$$c = A \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \quad (5)$$

1.2 Из уравнения состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M} RT \quad (6)$$

следует, что

$$\frac{P}{\rho} = \frac{R}{M} T. \quad (7)$$

Поэтому зависимость скорости звука от температуры описывается формулой

$$c = A \sqrt{\frac{P}{\rho}} = A \sqrt{\frac{R}{M} T}. \quad (8)$$

1.3 Подставим указанное выражение для температуры и преобразуем его

$$c = A \sqrt{\frac{R}{M} T} = A \sqrt{\frac{R}{M} (T_0 + \Delta T)} = A \sqrt{\frac{R}{M} T_0} \sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T_0}} = c_0 \sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T_0}}. \quad (9)$$

Здесь $c_0 = A \sqrt{\frac{R}{M} T_0}$ - скорость звука при температуре T_0 .

Часть 2. Распространение звука в неоднородно нагретой атмосфере.

2.1 Если температура воздуха изменяется с высотой, то соответственно изменяется и скорость звука, причем эта зависимость описывается формулой

$$T = T_0 + \gamma z \quad \Rightarrow \quad c = c_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{T_0} z} \quad (10)$$

Известный закон преломления света является следствием его волновых свойств, поэтому его можно обобщить на любые волновые процессы. Это можно доказать, например, используя принцип Гюйгенса. Изменение скорости распространения волны в оптике принято описывать, вводя показатель преломления среды. По аналогии со светом можно ввести «звуковой» показатель преломления.

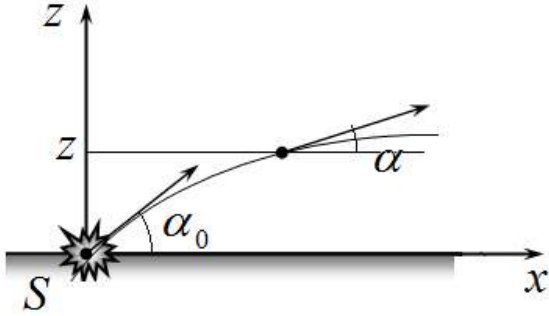
При температуре T_0 показатель преломления будем считать равным 1, тогда зависимость показателя преломления от высоты имеет вид

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma}{T_0}z}} \quad (11)$$

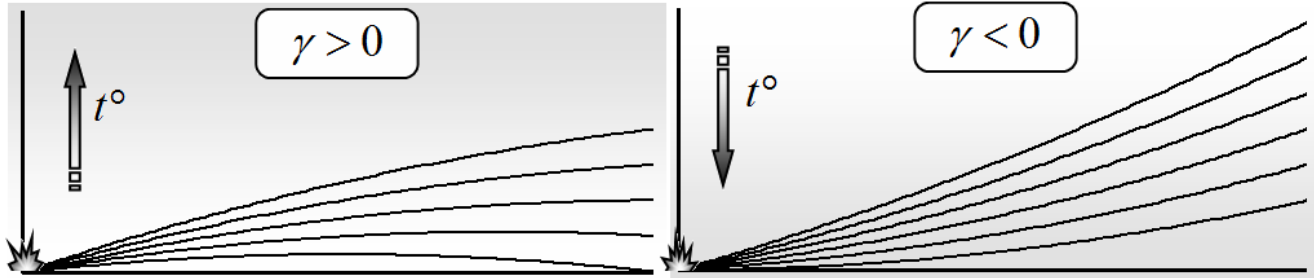
При заданном определении показателя преломления, закон преломления звука будет иметь вид

$$n \cos \alpha = \cos \alpha_0. \quad (12)$$

Здесь α - угол между звуковым лучом и горизонтом.



Используя этот закон и выражение (11) для зависимости показателя преломления от высоты, можно указать качественное поведение звуковых лучей. Если температура воздуха возрастает с высотой ($\gamma > 0$), то показатель преломления убывает – в этом случае звуковые лучи, преломляясь, изгибаются вниз. Некоторые из них даже могут достичь поверхности земли (см. рис). В противном случае ($\gamma < 0$) – лучи изгибаются вверх. Отметим, что именно эта ситуация чаще встречается в атмосфере.



2.2 При заданных условиях зависимость скорости звука от высоты имеет вид

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{T_0}z} = c_0 \sqrt{1 + \beta z} \quad (12)$$

Численные значения параметров в этой формуле равны

$$c_0 = 340 \frac{\mathcal{M}}{c}. \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{\Delta T}{\Delta z} = \frac{-1,0K}{100\mathcal{M}} = -1,0 \cdot 10^{-2} \frac{K}{\mathcal{M}}, \text{ следовательно.}$$

$$\beta = \frac{\gamma}{T_0} = -1,0 \cdot 10^{-2} \frac{K}{\mathcal{M}} \frac{1}{293K} = -3,4 \cdot 10^{-5} \mathcal{M}^{-1}. \quad (14)$$

2.3 Уравнение параболы, проходящей через начало координат, в общем виде задается функцией

$$z = ax^2 + bx. \quad (15)$$

2.4 Производная от функции (15) равна

$$z' = 2ax + b \quad (16)$$

В это выражение следует подставить значение x , выраженное через z . Для зависимости $z(x)$ надо решить уравнение

$$ax^2 + bx - z = 0. \quad (17)$$

Из которого следует, что

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4az}}{2a} \quad (18)$$

Подставляя это выражение в формулу (16), получим

$$z' = \pm \sqrt{b^2 + 4az}. \quad (19)$$

Два значения производной соответствуют двум ветвям параболы, т.е. при $x > 0$ следует брать положительный корень, при $x < 0$ - отрицательный. Таким образом, если производная от функции описывается уравнением (19), то его решение при нулевых начальных условиях есть функция (15)

2.5 Для расчета траектории луча $z(x)$ воспользуемся законом преломления

$$n \cos \alpha = \cos \alpha_0 \quad (20)$$

В котором зависимость показателя преломления от высоты задается функцией

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta z}} \quad (21)$$

Согласно определению угла α , его тангенс равен производной от искомой функции $z(x)$. Значение тангенса угла найдем с помощью тригонометрических формул

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{\frac{n^2}{\cos^2 \alpha_0} - 1} = \sqrt{\frac{n^2 - 1 + (1 - \cos^2 \alpha_0)}{\cos^2 \alpha_0}} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \frac{n^2 - 1}{\cos^2 \alpha_0}}. \quad (22)$$

Нам требуется найти приближенное уравнение траектории (в квадратичном приближении). Для этого достаточно подкоренное упростить с помощью приближенных формул, считая

z (точнее βz) и α малыми величинами и, оставляя в них только первый порядок. В этом приближении

$$\frac{n^2 - 1}{\cos^2 \alpha_0} \approx \frac{1}{1 + \beta z} - 1 \approx (1 - \beta z) - 1 = -\beta z . \quad (23)$$

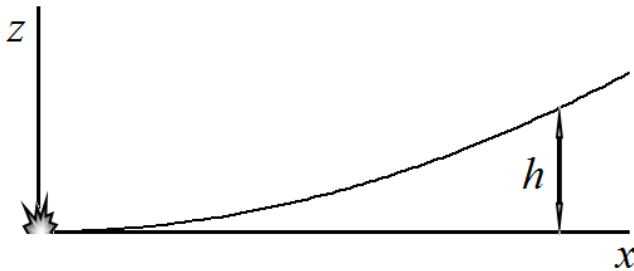
Тогда уравнение для траектории луча приобретает вид

$$z' = \sqrt{\alpha_0^2 - \beta z} , \quad (24)$$

который совпадает с уравнением (19). Поэтому решение этого уравнения задается функцией

$$z = -\frac{\beta}{4}x^2 + \alpha_0 x \quad (25)$$

Так как параметр $\beta < 0$, то ветви параболы оказываются направленными вверх — звук «уходит» ввысь!



2.6 Звуковые лучи, выходящие из источника под разными углами α_0 являются параболлами с одним коэффициентом при x^2 , поэтому самая «нижняя» парабола есть луч вышедший горизонтально ($\alpha_0 = 0$). Поэтому для определения расстояния, на котором луч проходит на высоте h необходимо решить уравнение

$$h = -\frac{\beta}{4}x^2 , \quad (26)$$

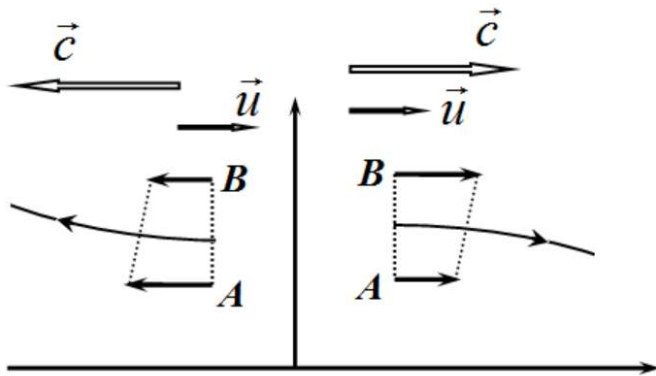
из которого находим

$$x = \sqrt{-\frac{4h}{\beta}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,0 M}{3,4 \cdot 10^{-5} M^{-1}}} = 0,49 \cdot 10^{-3} M . \quad (27)$$

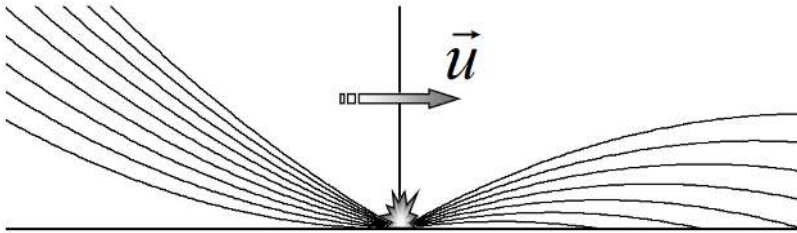
Заметим, что на больших расстояниях не будет слышен звук даже от мощного источника (например, взрыва), потому что звуковые волны уходят вверх. Дифракцией звуковых волн в данной задаче пренебрегаем.

Часть 3. Не кричите против ветра!

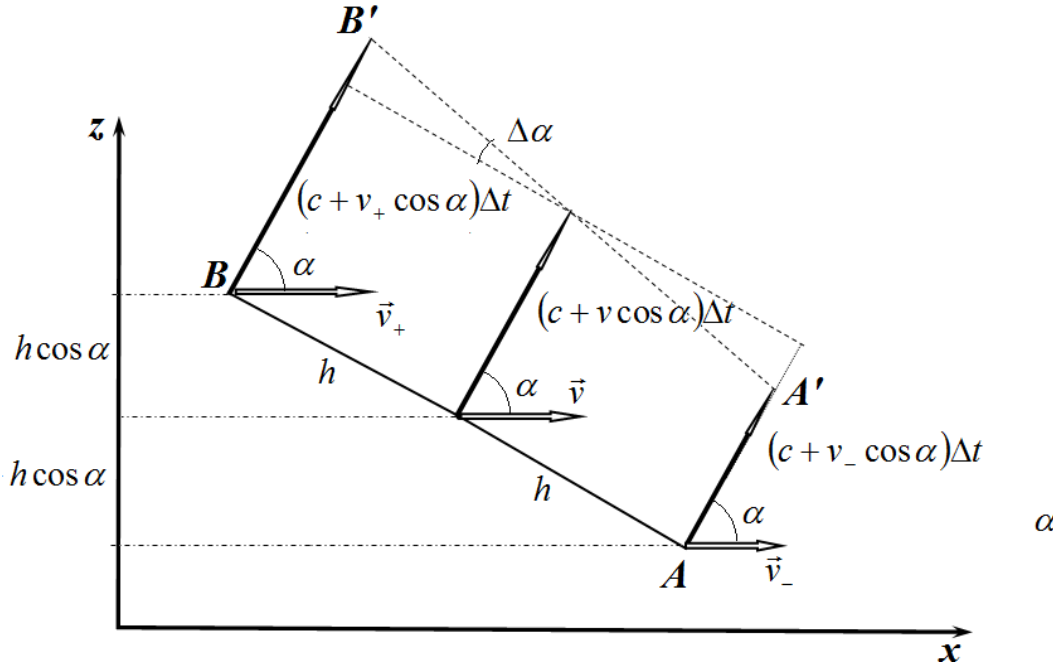
каю
сток
AB ,
льно
сть
няя
гее
е к
низ.
этра



3.1 При наличии ветра скорость распространения звука зависит от направления (можно сказать, что среда является анизотропной). Поэтому закон преломления в форме (12) применять нельзя. В таком случае оказывается удобным рассматривать изменение волновых поверхностей (фронтов) – поверхностей, которые звуковые лучи пересекают нормально. Рассмотрим участок волнового фронта AB , распространяющегося приблизительно по направлению ветра. Так как скорость ветра возрастает с высотой, то верхняя часть фронта будет смещаться быстрее нижней, поэтому лучи нормальные к этому фронту будут отклоняться вниз. При распространении звука против ветра ситуация обратная – верхняя часть фронта движется медленнее, поэтому в этом случае лучи отклоняются вверх. Аналогичная ситуация будет реализовываться и для других лучей: при движении по ветру они отклоняются вниз (прижимаются к земле), при распространении против ветра лучи отклоняются вверх.



3.2 Опишем «поворот» волнового фронта более подробно.



Рассмотрим луч, распространяющийся на высоте z под углом α к горизонту. Изобразим участок волнового фронта AB шириной $2h$. Согласно подсказке, сделанной в условии задачи скорость фронта равна сумме скоростей звука в неподвижном воздухе и нормальной составляющей скорости ветра, поэтому скорость смещения точек фронта равна

$$c' = c + v \cos \alpha. \quad (28)$$

Только необходимо учесть, что разные точки фронта находятся на разной высоте, поэтому они движутся с разной скоростью. Потому, что скорость ветра зависит от высоты - $v(z) = v_0 + \beta z$. Крайние точки выбранного участка фронта смещены относительно его середины на

величину $\Delta z = h \cos \alpha$. Поэтому скорости ветра в этих точках равны

$$v_{\pm} = v_0 \pm \beta h \cos \alpha, \quad (29)$$

где v_0 - скорость ветра на высоте z . За малый промежуток времени Δt смещения крайних точек задаются выражениями

$$\Delta S_{\pm} = (c + v_{\pm} \cos \alpha) \Delta t. \quad (30)$$

Из рисунка следует, что различие скоростей движения этих точек приведет к повороту фронта на угол

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= -\frac{(c + v_+ \cos \alpha) \Delta t - (c + v_- \cos \alpha) \Delta t}{2h} = -\frac{(v_+ - v_-) \cos \alpha \Delta t}{2h} = \\ &= -\frac{2\beta h \cos^2 \alpha \cdot \Delta t}{2h} = -\beta \cos^2 \alpha \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (31)$$

За тот же промежуток времени центр выбранного участка сместится по высоте на величину

$$\Delta z = (c + v_0 \cos \alpha) \sin \alpha \cdot \Delta t \approx c \sin \alpha \cdot \Delta t \quad (32)$$

Здесь учтено, что $v \ll c$

Следовательно, уравнение, описывающее изменение угла α имеет вид

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta z} = -\frac{\beta \cos^2 \alpha}{c \sin \alpha}. \quad (33)$$

3.3 В рамках использованного приближения уравнение (33) преобразуется к виду

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta z} = -\frac{\beta \cos^2 \alpha}{c \sin \alpha} \approx -\frac{\beta}{c \cdot \alpha}. \quad (34)$$

Из которого не сложно найти зависимость $\alpha(z)$ с учетом начальных условий:

$$\alpha \Delta \alpha = -\frac{\beta}{c} \Delta z \quad \Rightarrow \quad \Delta \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) = -\frac{\beta}{c} \Delta z \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2} = -\frac{\beta}{c} z \quad (35)$$

Окончательно получаем

$$\alpha = \sqrt{\alpha_0^2 - 2\frac{\beta}{c}z}. \quad (35)$$

Для скептиков, сомневающих в мощи приближенных методов. Уравнение (33) может быть решено точно

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{\beta \cos^2 \alpha}{c \sin \alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = -\frac{\beta}{c} dz \quad \Rightarrow \quad \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = -\frac{\beta}{c} z$$

Этот интеграл выражается через элементарные функции

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d(\cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \Big|_{\alpha_0}^{\alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha_0}$$

Далее необходимо выразить в явном виде $\cos \alpha$, провести тригонометрические преобразования типа (22) и ... получить уравнение (35)!

Как обычно – не понимаешь физики – сиди и интегрируй!

Вернемся, однако, к уравнению (35). Так как при малых углах α , угол равен производной $z'(x)$, то это уравнение совпадает с уравнением (24), поэтому его решением является функция

$$z = -\frac{\beta}{2}x^2 + \alpha_0 x \quad (36)$$

Таким образом, при распространении звука по ветру лучи представляют собой параболы, ветви которых направлены к земле.

При распространении звука против ветра необходимо поменять знак в уравнении (33), соответственно поменяется знак и решения, т.е. в этом случае лучи будут описываться функциями

$$z = +\frac{\beta}{2}x^2 + \alpha_0 x \quad (37)$$

Отметим, что в этом случае $x < 0$, но и $\alpha_0 < 0$.

Полученные результаты корректно описывают ход лучей, построенных в результате качественного анализа.

3.5 Итак, причиной того, что звук лучше распространяется по ветру является преломление звуковых лучей, в этом случае они «прижимаются» к земле и являются слышимыми. В противоположном направлении лучи уходят вверх и минуют уши слушателей. Также существенно, что, как правило, скорость ветра возрастает с высотой (вблизи поверхности скорость ветра меньше из-за влияния вязкого трения о поверхность земли).

Изменение скорости распространения звука по и против ветра никакой роли не играет: во-первых, скорость ветра мала по сравнению со скоростью звука; во-вторых, не принципиально услышите ли вы раньше или позже на несколько миллисекунд!