

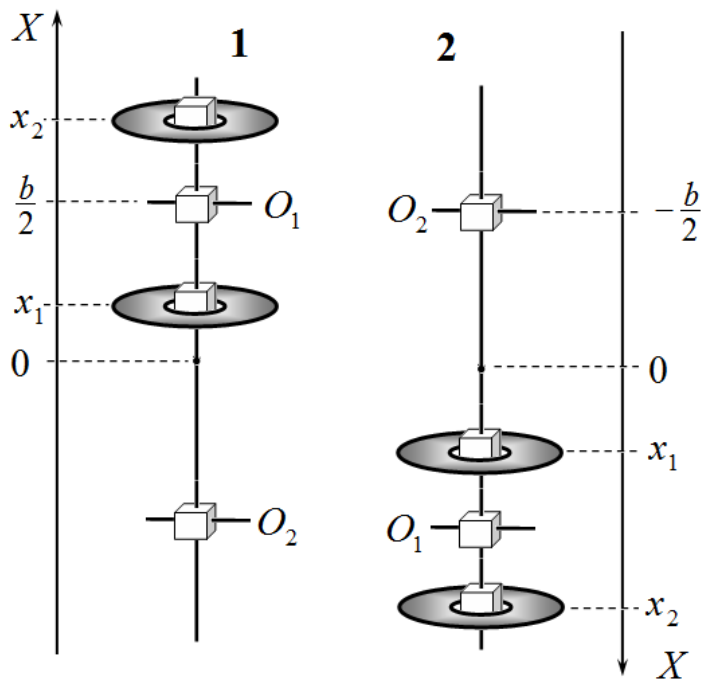
Условие

Задание 2. Обратный маятник

Ускорение свободного падения считать равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Приборы и оборудование: обратный маятник, штатив, линейка, секундомер.

Оборотный маятник (маятник Бесселя) представляет собой тонкий стержень, на котором закреплены две оси O_1 и O_2 и два подвижных груза (металлические шайбы), которые можно перемещать по стержню. Маятник можно подвешивать в лапке штатива, так чтобы он свободно колебался на оси повеса в прямом (1) и перевернутом (2) положениях.



Оси должны быть расположены симметрично относительно центра стержня, расстояние между ними должно быть $b = 16$ см. Положения грузов задаются координатами x_1, x_2 , которые отсчитываются от центра стержня. Если пренебречь массами стержня и осей, а грузы считать материальными точками, то периоды колебаний маятника в прямом и перевернутом положении рассчитываются по формулам (их вывод не требуется)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{(\frac{b}{2} - x_1)^2 + (\frac{b}{2} - x_2)^2}{(\frac{b}{2} - x_1) + (\frac{b}{2} - x_2)}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{(\frac{b}{2} + x_1)^2 + (\frac{b}{2} + x_2)^2}{(\frac{b}{2} + x_1) + (\frac{b}{2} + x_2)}} : \quad (1)$$

Приведенной длиной физического маятника l называется длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний.

Часть 1. Теоретическая.

1.1 Получите уравнение для множества точек (x_1, x_2) , для которых приведена длина маятника в прямом положении постоянна и равна l_1 . На диаграмме (x_1, x_2) постройте это множество точек.

1.2 Получите уравнение для множества точек (x_1, x_2) , для которых приведена длина маятника в перевернутом положении постоянна и равна l_2 . На той же диаграмме (x_1, x_2) постройте это множество точек.

1.3 Постройте на диаграмме множество точек (x_1, x_2) , для которых приведенные длины маятника в прямом и перевернутом положениях постоянны одинаковы и равны l_0 . Укажите чему

равна приведенная длина l_0 в этом случае.

Построения данной части выполняйте в тетради и схематически.

Часть 2. Экспериментальная.

2.1 Установите первый груз на середине стержня ($x_1 = 0$). Измерьте зависимости периодов колебаний маятника в прямом $T_1(x_2)$ и перевернутом положениях $T_2(x_2)$ в зависимости от координаты второго груза ($x_2 > \frac{b}{2}$). Постройте графики полученных зависимостей.

2.2 Используя полученные данные, определите значение координаты второго груза x_2^* , при которой периода колебаний в прямом и перевернутом положении одинаковы. Определите период колебаний маятника T_0 в этом случае.

2.3 Рассчитайте значение приведенной длины маятника l_0 , когда периоды колебаний маятника в прямом и перевернутом положениях совпадают. Оцените погрешность найденного значения.

Часть 3. Сравнение.

3.1 Изменяя положение второго груза x_2 , экспериментально определите значения координаты первого груза x_1 при которых период колебаний маятника в прямом положении равен T_0 (найденному в п.2.2). При найденных значениях (x_1, x_2) измерьте значения периода колебаний маятника в перевернутом положении.

3.2 Постройте диаграмму найденных экспериментально точек (x_1, x_2) . Нанесите на нее рассчитанную в п. 1.3 теоретическую диаграмму.

3.3 Укажите возможные причины наблюдаемых различий.

Решение

Часть 1. Теоретическая

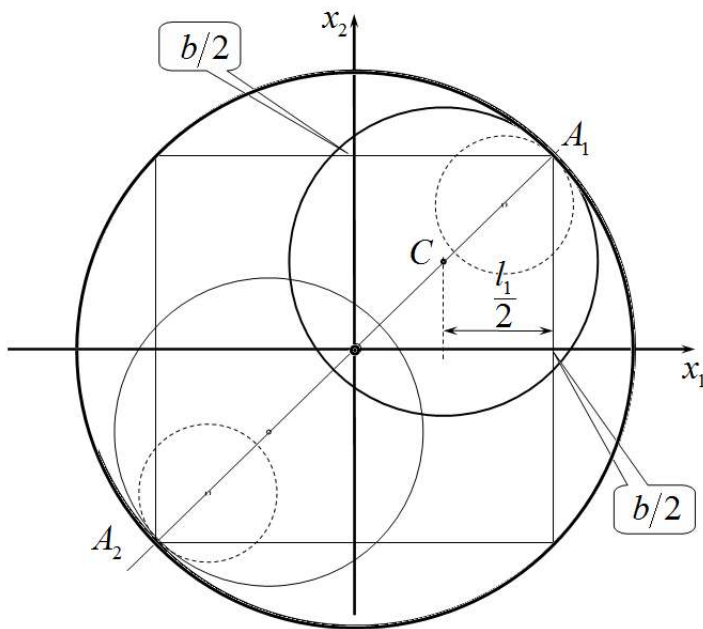
1.1 Из приведенной в условии формулы для периода колебаний, следует, что приведенная длина будет постоянной при выполнении условия

$$\frac{\left(\frac{b}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - x_2\right)^2}{\left(\frac{b}{2} - x_1\right) + \left(\frac{b}{2} - x_2\right)} = l_1 \quad (1)$$

Данное выражение можно преобразовать к более простому и наглядному виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{b}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - x_2\right)^2 - l_1 \left(\frac{b}{2} - x_1\right) - l_1 \left(\frac{b}{2} - x_2\right) &= 0 \Rightarrow \\ \left(\frac{b}{2} - x_1\right)^2 - l_1 \left(\frac{b}{2} - x_1\right) &= \left(\frac{b}{2} - x_1\right)^2 - 2\frac{l_1}{2} \left(\frac{b}{2} - x_1\right) + \frac{l_1^2}{4} - \frac{l_1^2}{4} = \left(\frac{b}{2} - \frac{l_1}{2} - x_1\right)^2 - \frac{l_1^2}{4} \Rightarrow \\ \left(\frac{b}{2} - \frac{l_1}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{l_1}{2} - x_2\right)^2 &= \frac{l_1^2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Эта формула задает окружность с центром C с координатами $x_1 = \frac{b}{2} - \frac{l_1}{2}$; $x_2 = \frac{b}{2} - \frac{l_1}{2}$, радиус этой окружности $R_1 = \frac{l_1}{\sqrt{2}}$. Легко заметить, что при любых значениях приведенной длины l_1 окружность проходит через точку A_1 с координатами $x_1 = \frac{b}{2}$; $x_2 = \frac{b}{2}$. Эта точка есть вершина квадрата со стороной равной расстоянию между осями b , центр этого квадрата находится в начале координат.



1.2 Для перевернутого положения преобразования выполняются аналогично (можно просто изменить знаки перед параметрами x_1 и x_2). Уравнение геометрического места точек в данном случае имеет вид

$$\left(\frac{b}{2} - \frac{l_1}{2} + x_1\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{l_1}{2} + x_2\right)^2 = \frac{l_2^2}{2} \quad (3)$$

Это есть окружность, проходящая через противоположную вершину квадрата A_2 .

1.3 Для того, чтобы периоды колебаний были одинаковы при обоих положениях маятника необходимо, чтобы построенные окружности совпадали. Т.е. окружность должна быть описана вокруг построенного квадрата. Уравнение этой окружности

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2}{2}. \quad (4)$$

Соответствующая ей приведенная длина оказывается равной расстоянию между осями $l_0 = b$.

Часть 2. Экспериментальная.

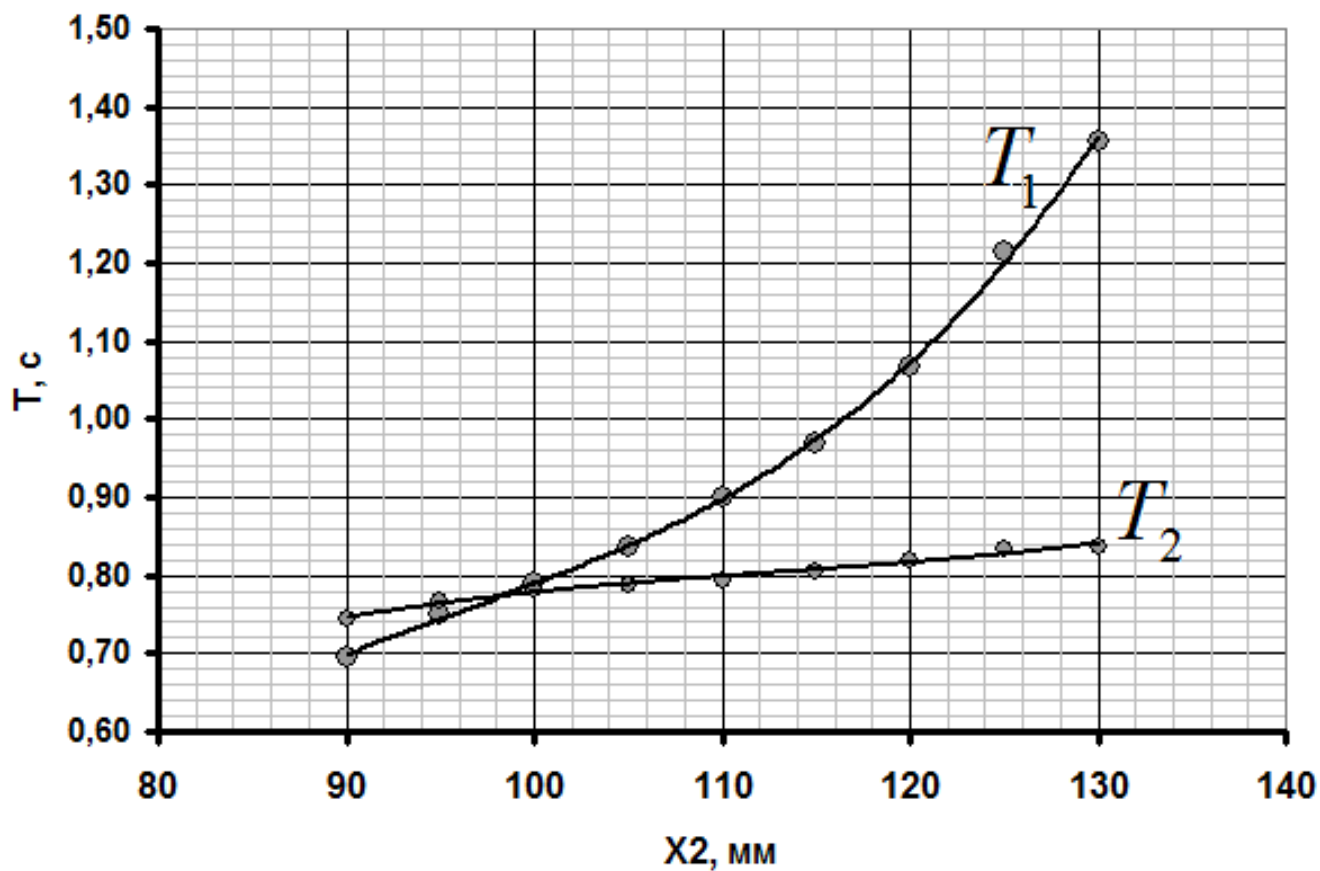
2.1 Результаты измерений зависимости периодов колебаний в прямом (T_1) и перевернутом положениях (T_2) от координаты x_2 приведены в Таблице 1, по данным которой построен график исследованной зависимости

Таблица 1.

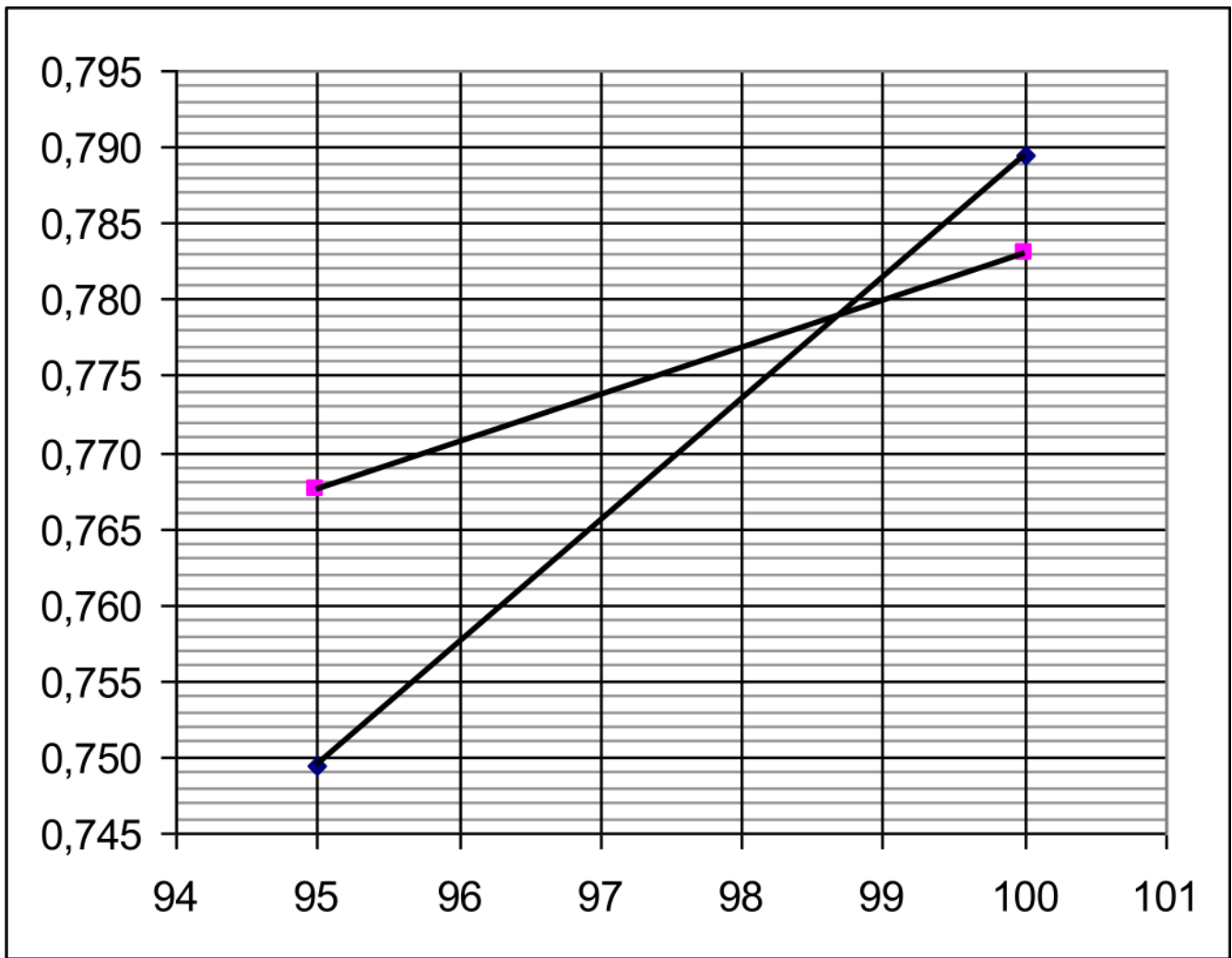
X_2 , мм	Времена 10 колебаний	T_1 , с	T_2 , с			
	t_1 , с		t_2 , с			
90	7,02	6,90	7,50	7,37	0,696	0,744
95	7,35	7,28	7,71	7,64	0,750	0,768
100	7,94	7,85	7,78	7,88	0,790	0,783
105	8,38	8,35	7,86	7,89	0,837	0,788
110	9,06	8,96	7,98	7,91	0,901	0,795
115	9,65	9,74	8,00	8,08	0,970	0,804
120	10,63	10,69	8,21	8,20	1,066	0,821
125	12,17	12,09	8,34	8,31	1,213	0,833
130	13,59	13,54	8,36	8,39	1,357	0,838

Зависимость периода колебаний от координаты

Зависимость периода колебаний от координаты



2.2 Для более точного определения значений координаты, когда периоды совпадают и значения этого периода можно провести линейную интерполяцию зависимостей в области пересечения. Из этого рисунка следует, что $x_2^* = 99$ мм; $T_0 = 0,779$ с



2.3 Приведенная длина маятника в этом случае оказывается равной

$$l = \frac{T_0^2 g}{4\pi^2} = 152 \text{ мм},$$

Что примерно равно расстоянию между осями маятника. Этот результат есть первое подтверждение построенной теории.

Часть 3. Сравнение.

Для выполнения этой части задачи удобнее построить график теоретический, а затем с его помощью искать нужные положения грузов. Важно отметить, что для каждого значения координаты x_2 существует два симметричных относительно центра маятника положения $\pm x_1$, при которых периоды колебаний равны T_0 . Измерения показывают, что экспериментальные точки лежат достаточно близко к построенной окружности.

Постоянство периода

