

Условие

Задача 2. Негармонические колебания

Часть 1.

Материальная точка массы m может двигаться без трения вдоль оси Ox . Зависимость ее потенциальной энергии от координаты x задается функцией

$$U(x) = ka^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} - 2 \right), \quad (1)$$

где k и a - известные положительные постоянные величины.

1.1 Постройте схематический график зависимости потенциальной энергии частицы от координаты x .

Точка начинает двигаться без начальной скорости, причем в начальный момент времени $t = 0$ ее координата равна $x = x_0$ ($x_0 > a$).

1.2 Покажите, что движение точки будет колебательным. Укажите, будут ли эти колебания гармоническими. 1.3 Найдите, в каких пределах будет изменяться координата точки в процессе ее движения. 1.4 Найдите период малых колебаний точки, если амплитуда этих колебаний значительно меньше a . 1.5 Найдите период очень больших колебаний точки при $x_0 \gg a$. 1.6 Покажите, что период колебаний точки не зависит от ее начального положения x_0 .

Подсказка. Рассмотрите зависимость квадрата координаты от времени $z(t) = x^2(t)$. Получите уравнение, описывающее изменение этой величины.

Пусть $x_0 = 3a$.

1.7 Найдите закон движения точки, т.е. зависимость ее координаты от времени $x(t)$. 1.8 Постройте схематический график зависимости $x(t)$. Для этого используйте относительные координаты $\frac{x}{a}$ и $\frac{t}{T}$, где T - найденный период колебаний точки.