

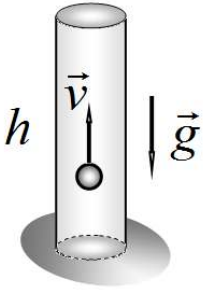
Условие

Задание 2. Знаете ли Вы МКТ?

В данном задании вам необходимо решить несколько взаимосвязанных задач, чтобы продемонстрировать свое понимание основ молекулярно-кинетической теории и умение использовать математический аппарат этой теории.

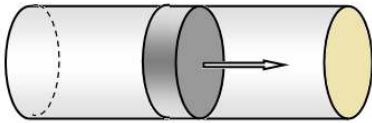
Часть 1. Всего один шарик.

В вертикальном закрытом сосуде высотой h , находится небольшой шарик массы m , движущийся вертикально. Сопротивлением воздуха следует пренебречь, а его удары о дно и крышку сосуда считать абсолютно упругими, ускорение свободного падения равно g . Когда шарик находится у дна сосуда, его скорость равна v_0 . Можно считать, что удары шарика происходят достаточно часто, поэтому следует рассчитывать средние силы давления шарика за промежуток времени, значительно превышающий время между ударами.



1.1 Найдите среднюю силу давления шарика на дно сосуда, если $v_0^2 < 2gh$. 1.2 Пусть скорость шарика у дна сосуда $v_0 > \sqrt{2gh}$. Рассчитайте средние силы давления шарика на дно и крышку сосуда, а также разность этих сил.

Часть 2. Очень много молекул.



В закрытом с обеих сторон цилиндрическом сосуде находится легкий подвижный тонкий поршень, который делит сосуд на две равные части. Площадь поршня (она же площадь поперечного сечения сосуда) равна S . По обе стороны от поршня находится по одному молю одноатомного идеального газа, молярная масса которого равна M . Температура газа с обеих сторон поршня одинакова и равна T_0 , давление газа P_0 . Поршень начинается двигаться вдоль сосуда с постоянной скоростью u , которая значительно меньше средней скорости теплового движения молекул газа. Действие силы тяжести не учитывать. Удары молекул о поршень можно считать абсолютно упругими.

2.1 Чему равны среднеквадратичная скорость молекул газа $\langle v_{\text{кв.}} \rangle$ и среднеквадратичная проекция скорости газа на произвольное направление (например, на ось x) $\langle v_{\text{кв.}x} \rangle$ 2.2 Оцените силу сопротивления, действующую на поршень со стороны газа в начальный момент его движения. Считайте, что пластина уже имеет скорость u , но ее смещением можно пренебречь. 2.3 Оцените изменение температур газа с обеих сторон от поршня, при смещении поршня на малую величину Δx .

Указание. При строгом решении данной задачи следует использовать различные средние значения. При проведении оценок везде используйте среднеквадратичные скорости и их проекции.

Решение

Задание 2. Знаете ли Вы МКТ?

Часть 1. Всего один шарик.

При расчете сил давления следует использовать следующую основную идею: средняя сила равна отношению импульса, полученного телом, к промежутку времени, в течение которого этот импульс был получен:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (1)$$

1.1 При выполнении условия $v_0^2 < 2gh$ шарик не будет ударяться о крышку сосуда. В момент каждого удара о дно сосуда он будет передавать дну импульс

$$\Delta p = 2mv_0 \quad (2)$$

При равноускоренном движении в поле тяжести земли зависимость вертикальной координаты шарика имеет вид

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (3)$$

Поэтому время между двумя последовательными ударами можно легко найти из выражения (2), полагая $z = 0$. Тогда время между ударами оказывается равным

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g}. \quad (4)$$

А средняя сила давления шарика на дно сосуда равна (как ни странно!?):

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = mg. \quad (5)$$

1.2 Если скорость шарика у дна $v_0 > \sqrt{2gh}$, то он будет ударяться и о верхнюю крышку сосуда. Скорость шарика при ударе о крышку рассчитывается по формуле

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \quad (6)$$

Так как движение шарика между ударами является равноускоренным, то время подъема шарика и равное ему время падения оказывается равным

$$\tau = \frac{h}{\frac{1}{2}(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh})} = \frac{2h}{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}. \quad (7)$$

Тогда средняя сила давления шарика на дно равна

$$F_1 = \frac{2mv_0}{2\tau} = \frac{mv_0}{2h} \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh} \right). \quad (8)$$

Сила давления на крышку рассчитывается аналогично:

$$F_2 = \frac{2mv_1}{2\tau} = \frac{m\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{2h} \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh} \right). \quad (9)$$

Разность этих сил опять равна

$$F_2 - F_1 = mg. \quad (10)$$

Часть 2. Очень много молекул.

2.1 Средняя квадратичная скорость молекул рассчитывается по известной формуле

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{3 \frac{RT}{M}} \quad (11)$$

Так как все направления в пространстве равноправны, то

$$\langle v_{\text{кв.}x} \rangle = \langle v_{\text{кв.}y} \rangle = \langle v_{\text{кв.}z} \rangle.$$

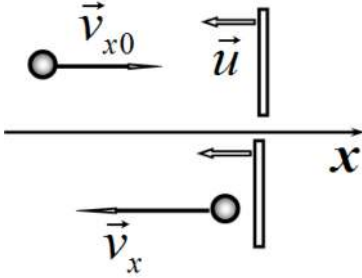
Кроме того,

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2.$$

Поэтому

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \Rightarrow \langle v_{\text{кв.}x} \rangle = \sqrt{\frac{RT}{M}}. \quad (12)$$

2.2 При ударе молекулы о поршень изменяется только та проекция вектора скорости, которая перпендикулярна плоскости поршня. Поэтому направим ось x перпендикулярно поршню, вдоль оси сосуда. Рассмотрим молекулу, которая налетает на поршень, имея компоненту скорости, перпендикулярную пластине v_{x0} . Если скорость поршня равна u и направлена

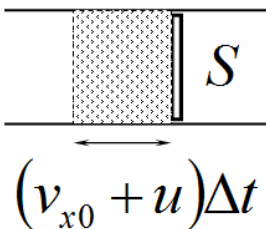


навстречу налетающей молекуле, то после абсолютно упругого удара проекция скорости молекулы станет равной

$$v_x = -v_{x0} - 2u \quad (13)$$

Это соотношение легко доказать, рассматривая упругий удар в системе отсчета, связанной с поршнем, а затем вернувшись в систему отсчета, связанную с сосудом. Изменение проекции импульса молекулы при ударе равно (m - масса одной молекулы)

$$\Delta p_x = -m(v_{x0} + 2u) - mv_{x0} = -2m(v_{x0} + u). \quad (14)$$



Такой же по модулю, но противоположно направленный импульс получит поршень. Предположим, что у всех молекул модуль проекции скорости на ось равна v_{x0} . Тогда за малый промежуток времени Δt до поршня долетят те молекулы, которые находятся на расстоянии меньше, чем $(v_{x0} + u)\Delta t$. Число этих молекул равно

$$\Delta N = \frac{1}{2}nS(v_{x0} + u)\Delta t. \quad (15)$$

Здесь n - концентрация молекул, также учтено, что в направлении стенки летят половина молекул. Эти молекулы предадут стенке импульс, равный

$$\Delta p_{\Sigma} = \frac{1}{2}nS(v_{x0} + u)\Delta t \cdot 2m(v_{x0} + u) = mn(v_{x0} + u)^2 S\Delta t. \quad (16)$$

Теперь можно провести усреднение по скоростям молекул:

$$\Delta p_{\Sigma} = \langle mn(v_{x0} + u)^2 \rangle = mn (\langle v_{x0}^2 \rangle + 2 \langle v_{x0} \rangle u + u^2) S\Delta t. \quad (17)$$

В соответствии с общим подходом, средняя сила, действующая на поршень с одной стороны, равна

$$F_1 = \frac{\Delta p_{\Sigma}}{\Delta t} = mn (\langle v_{x0}^2 \rangle + 2 \langle v_{x0} \rangle u + u^2) S. \quad (18)$$

Понятно, что для вычисления силы, действующей на вторую сторону поршня достаточно в формуле (18) заменить знак скорости u :

$$F_2 = \frac{\Delta p_{\Sigma}}{\Delta t} = mn (\langle v_{x0}^2 \rangle - 2 \langle v_{x0} \rangle u + u^2) S. \quad (19)$$

Разность этих сил и есть сила, действующая на поршень со стороны газа:

$$F = F_1 - F_2 = 4mn \langle v_{x0} \rangle uS. \quad (20)$$

Осталось выразить величины, входящие в эту формулу, через величины, заданные в условии задачи:

$$m = \frac{M}{N_A}; \quad n = \frac{P_0}{kT_0}; \quad \langle v_x \rangle = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}. \quad (21)$$

В итоге получаем:

$$F = 4mn \langle v_{x0} \rangle uS = 4 \frac{M}{N_A} \frac{P_0}{kT_0} \sqrt{\frac{RT_0}{M}} Su = 4P_0 \sqrt{\frac{M}{RT_0}} Su. \quad (22)$$

2.3 Используя формулу (13), найдем изменение кинетической энергии молекулы при ударе (слагаемое пропорциональное u^2 можно опустить):

$$\Delta E_1 = \frac{m}{2}(v_{x0} + u)^2 - \frac{m}{2}(v_{x0})^2 = mv_{x0}u \quad (23)$$

Тогда за малый промежуток времени Δt изменение энергии всего газа равно (усреднение проводим сразу):

$$\Delta E_{\Sigma} = \left\langle \frac{1}{2}nSv_{x0}\Delta t \cdot mv_{x0}u \right\rangle = \frac{1}{2}mn \langle v_{x0}^2 \rangle uS\Delta t = \frac{1}{2}mn \langle v_{x0}^2 \rangle S\Delta x = \frac{1}{2}P_0 \cdot S\Delta x. \quad (24)$$

Это же изменение энергии можно выразить через изменение абсолютной температуры газа:

$$\Delta E = \frac{3}{2} R \Delta T. \quad (25)$$

Приравнивая эти выражения, находим изменение температуры газа:

$$\Delta T = \frac{1}{3} \frac{P_0 \cdot S \Delta x}{R}. \quad (26)$$