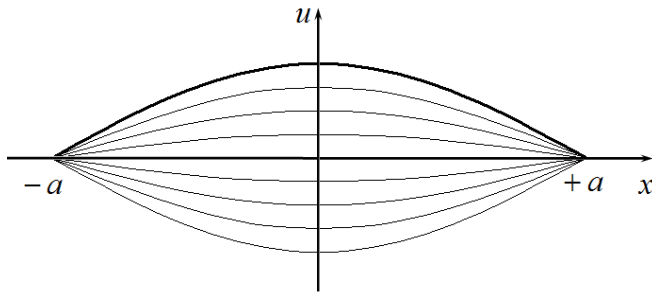


Условие

Задача 2. Гитарная струна.

В данной задаче рассматриваются малые поперечные колебания гитарной струны с закрепленными концами.

Основная мода (тип, форма) колебания этой струны показана на рисунке (жирная линия – форма струны в начальный момент времени, тонкие линии ее форма в другие последовательные моменты времени).



Для описания колебаний струны введем ось x , которая совпадает с положением струны в состоянии равновесия. Координаты точек крепления струны $\pm a$ (длина струны равна $2a$). Колебания струны описываются функцией $u(x, t)$ – зависимостью отклонения точки струны с координатой x от времени.

В состоянии равновесия струна натянута, сила натяжения равна T . При малых колебаниях струны изменением силы натяжения струны можно пренебречь.

Линейная плотность (масса единицы длины) струны равна ρ .

Часть 1. Бегущие и стоячие волны на струне.

В данной части рассмотрим бесконечную струну, сила натяжения которой равна T , а линейная плотность ρ . По струне пробегают гармонические волны с малой амплитудой U_0 . Круговая частота этих волн ω , длина волны λ .

1.1 Запишите функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, описывающие волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси x , соответственно. 1.2 Покажите, что при наложении этих волн возникает стоячая волна. Получите функцию $u(x, t)$, описывающую эту стоячую волну. 1.3 Выразите скорость распространения бегущих волн через характеристики волны ω и λ .

Часть 2. Колебания закрепленной струны.

Рассмотрим колебания закрепленной струны, показанные на рисунке. Обозначим круговую частоту изображенного типа колебаний ω , в этой части вам необходимо выразить эту частоту через характеристики струны: ее длину $2a$, силу натяжения T и линейную плотность ρ .

2.1 Запишите функцию $u(x, t)$, описывающую рассматриваемый тип колебаний струны.

Обозначим отклонение центральной точки струны от положения равновесия $u_0(t)$, а ее скорость $v_0(t)$.

2.2 Выразите кинетическую энергию $E(t)$ движения всей струны через скорость ее центра $v_0(t)$.

2.3 Выразите потенциальную энергию деформации струны $W(t)$ через координату центра струны $u_0(t)$. 2.4 Выразите круговую частоту рассматриваемых колебаний ω через параметры струны a, ρ, T . 2.5 Получите формулу для скорости распространения бегущих волн по бесконечной струне.

Математические подсказки. 1. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$. 2. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$. 3. $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$. 4. Длина изогнутой струны, показанной на рисунке, описывается приближенной формулой

$$l = 2a \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi u_0}{2a} \right)^2 \right),$$

где u_0 - отклонение центра струны.

Решение

Задача 2. Гитарная струна.

Часть 1. Бегущие и стоячие волны на струне.

1.1 Функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, описывающие волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси x , имеют вид

$$u_1(x, t) = U_0 \cos(\omega t - kx) u_2(x, t) = U_0 \cos(\omega t + kx) \quad (1)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число.

1.2 Результатом сложения этих волн является волна, описываемая функцией

$$u(x, t) = U_0 \cos(\omega t - kx) + U_0 \cos(\omega t + kx) = 2U_0 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \quad (2)$$

Эта функция описывает стоячую волну.

1.3 Скорость волны может быть представлена в виде

$$c = \lambda \nu = \frac{\lambda \omega}{2\pi}. \quad (3)$$

Часть 2. Колебания закрепленной струны.

2.1 Функция, описывающая данный тип колебаний имеет вид

$$u(x, t) = U_0 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right). \quad (4)$$

2.2 Если зависимость смещения точек струны от времени имеет вид (4), то зависимость их скоростей от времени задается функцией

$$v(x, t) = -U_0 \omega \sin(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right) = v_0 \cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right). \quad (5)$$

Выделим на струне небольшой участок длиной Δx , положение которого определяется координатой x . Кинетическая энергия этой малой части струны равна

$$\Delta E = \frac{\rho \Delta x}{2} v^2(x) = \frac{\rho \Delta x}{2} v_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2a}x\right). \quad (6)$$

Кинетическая энергия всей струны рассчитывается как сумма кинетических энергий всех ее участков:

$$E = \sum_i \frac{\rho \Delta x}{2} v_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2a}x_i\right) = \frac{\rho v_0^2}{2} \sum_i \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(2\frac{\pi}{2a}x_i\right)\right) \Delta x = \frac{\rho v_0^2}{2} a. \quad (7)$$

При вычислении суммы учтено, что сумма длин всех участков равна длине струны $\sum_i \Delta x = 2a$. Второе слагаемое обращается в ноль, так как в рассматриваемом интервале x косинус принимает как положительные, так и отрицательные значения.

2.3 Так как сила изменением силы натяжения струны рекомендовано пренебречь, то потенциальная энергия изогнутой струны равна работе по растяжению струны:

$$W = T\Delta l = T. \quad (8)$$

Используя формулу для длины струны, приведенную в «Математической подсказке», получаем выражение для потенциальной энергии струны

$$W = T\Delta l = \frac{\pi^2 T}{8a} u_0^2. \quad (9)$$

2.4 Запишем уравнения закона сохранения механической энергии для всей струны

$$\frac{\rho a}{2} v_0^2 + \frac{\pi^2 T}{8a} u_0^2 = \text{const}. \quad (10)$$

Это уравнение есть уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{\pi^2 T}{8a}}{\frac{\rho a}{2}}} = \frac{\pi}{2a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (11)$$

2.5 Рассматриваемое колебание можно рассматривать как стоячую волну, описываемую функцией (4). Сравнивая эту функцию с функцией (2), находим, что данное колебание есть сумма двух бегущих волн с длиной волны

$$\lambda = 4a. \quad (12)$$

Поэтому можно использовать формулу (3) для скорости бегущей волны, в результате чего получим

$$c = \frac{\lambda \omega}{2\pi} = \frac{4a \cdot \frac{\pi}{2a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}}{2\pi} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (13)$$