

Блинчики

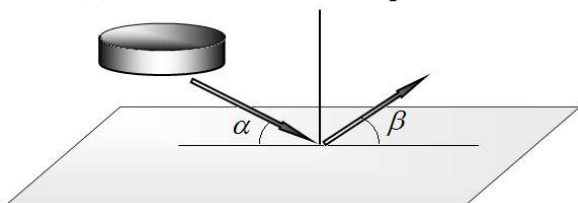
Условие

Задание 3. «Блинчики» на воде.

Каждый из Вас когда-либо пытался бросать камень на озёрную гладь, добиваясь отскоков. Конечно, чем больше блинчиков получится – тем лучше! Однако, данный трюк повторить не так-то уж и просто. Большинству из нас знакомы эмпирические правила: необходимо выбирать сплюснутые камни с гладкой поверхностью, бросать их как можно сильнее под малым углом к поверхности воды, при этом слегка закручивая. В данной задаче попробуем разобраться, какие параметры и как влияют на количество отскоков камня.

Часть 1. Отскок от земли

Для начала рассмотрим отражение камня от поверхности земли. Камень дискообразной формы падает плашмя на поверхность земли.



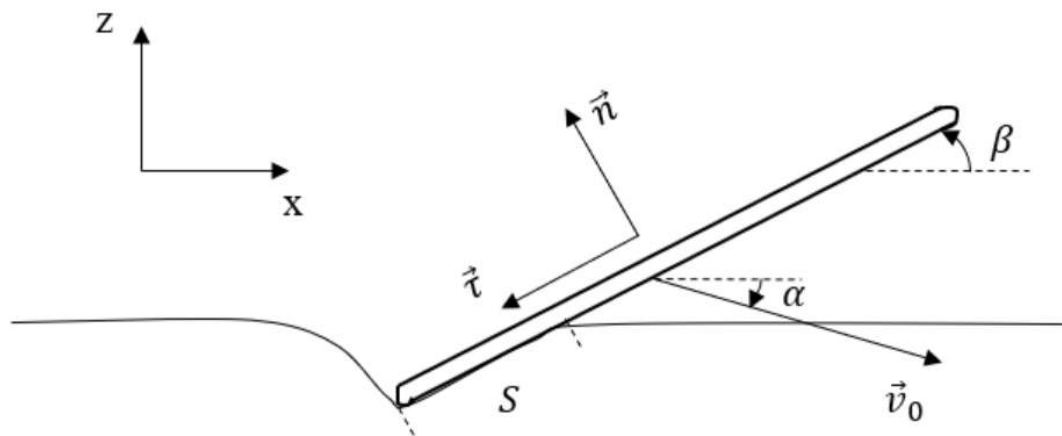
Скорость камня в начальный момент удара v_0 направлена под углом α к горизонту. Коэффициент трения μ . Удар абсолютно упругий (проекция скорости на вертикальную ось поменяет свой знак). Действием силы тяжести за время удара в данной части можно пренебречь.

1.1. Найдите угол β , а также скорость камня v после удара.

Часть 2. Отскок от воды

Камень массы M падает на поверхность воды со скоростью v_0 , направленной под углом $\alpha \ll 1$ к горизонту. Угол между поверхностью камня и горизонтом $\beta \ll 1$ (см. рис.).

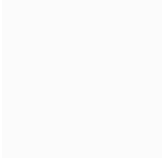
$\alpha \ll 1$ к горизонту. Угол между поверхностью камня и горизонтом $\beta \ll 1$ (см. рис.).



Точное описание соударения камня о воду требует нахождения течений, возникающих в процессе удара, путём решения уравнения Навье-Стокса. Данная задача является достаточно трудной и может быть решена лишь численными методами. Рассмотрим упрощённую модель взаимодействия камня с водой:

* при ударе на камень (если он не погрузился в воду полностью) действует сила вязкого трения, которая определяется выражением

$$F_{\text{в}} = C_n \rho v^2 S \vec{n} + C_\tau \rho v^2 S \vec{\tau},$$



где ρ — плотность воды, v — модуль скорости камня, S — площадь погруженной части камня, C_n и C_τ — безразмерные коэффициенты, имеющие одинаковый порядок величины и зависящие от углов α и β , $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ — единичные векторы, указанные на рисунке;

- в процессе соударения скорость камня и угол α меняются незначительно, а угол β не меняется вовсе; - в силу последнего приближения величины C_n и C_τ постоянны в процессе удара; - начала отсчёта Oz и Ox выберем в месте, где камень начинает соприкасаться с водой; - в силу наличия набегающих волн, обтекающих камень при ударе, будем считать, что площадь погруженной части камня линейно зависит от глубины погружения: $S = a|z|$, величину a считайте известной.

2.1. Запишите уравнение движения камня в проекции на оси X и Z. Упростите данные уравнения с учётом указанных приближений. 2.2. Покажите, что в любой момент времени проекции силы сопротивления воды связаны соотношением $F_{\text{вх}} = -\mu F_{\text{вz}}$. Получите выражение для коэффициента μ . 2.3. Найдите зависимость координаты нижней точки камня от времени $z(t)$. 2.4. Найдите время соударения камня с водой t_0 .

Пусть масса камня $M = 0,1$ кг, скорость перед ударом $v_0 = 10$ м/с, углы $\alpha = \beta = 10^\circ$, для данных углов и формы камня $a = 60$ см, площадь поверхности камня $S_0 = 100$ см² (вся поверхность), коэффициенты $C_n = C_\tau = 0,5$, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с².

2.5. Для указанных параметров вычислите время соударения t_0 и расстояние l_0 , пройденное камнем вдоль оси X за время соударения. 2.6. Найдите среднюю проекцию равнодействующей силы, действующей на камень, на ось X $\langle F_x \rangle$. 2.7. Отскочит ли камень при указанных параметрах? Если да, то с какой конечной скоростью и под каким углом к горизонту? 2.8. Можно ли в данной модели воду считать твёрдым телом?

Подсказка.

- $\langle \sin \varphi \rangle_{\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]} = \frac{2}{\pi}$.