

## Блинчики

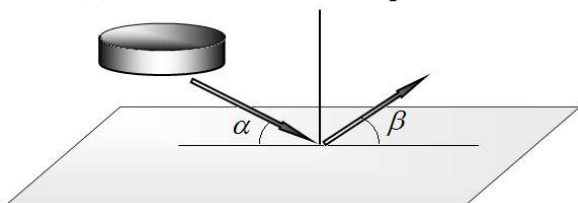
### Условие

#### Задание 3. «Блинчики» на воде.

Каждый из Вас когда-либо пытался бросать камень на озёрную гладь, добиваясь отскоков. Конечно, чем больше блинчиков получится – тем лучше! Однако, данный трюк повторить не так-то уж и просто. Большинству из нас знакомы эмпирические правила: необходимо выбирать сплюснутые камни с гладкой поверхностью, бросать их как можно сильнее под малым углом к поверхности воды, при этом слегка закручивая. В данной задаче попробуем разобраться, какие параметры и как влияют на количество отскоков камня.

#### Часть 1. Отскок от земли

Для начала рассмотрим отражение камня от поверхности земли. Камень дискообразной формы падает плашмя на поверхность земли.



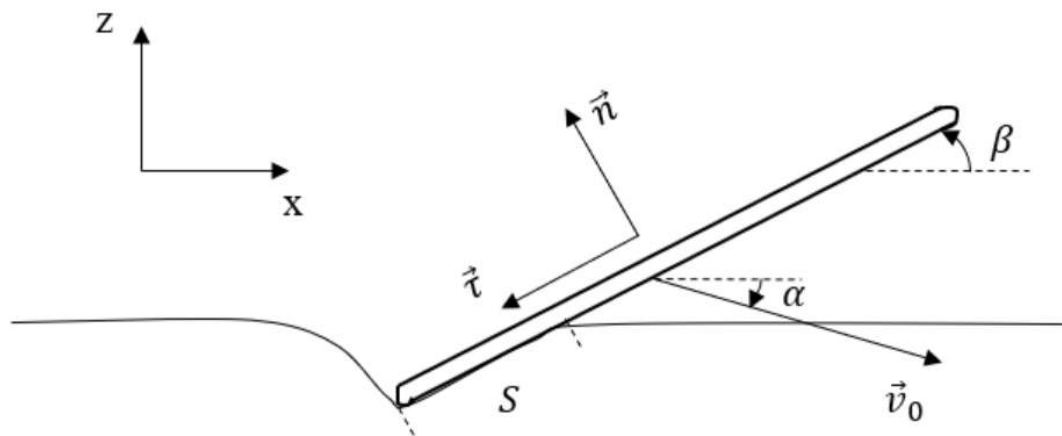
Скорость камня в начальный момент удара  $v_0$  направлена под углом  $\alpha$  к горизонту. Коэффициент трения  $\mu$ . Удар абсолютно упругий (проекция скорости на вертикальную ось поменяет свой знак). Действием силы тяжести за время удара в данной части можно пренебречь.

1.1. Найдите угол  $\beta$ , а также скорость камня  $v$  после удара.

#### Часть 2. Отскок от воды

Камень массы  $M$  падает на поверхность воды со скоростью  $v_0$ , направленной под углом  $\alpha \ll 1$  к горизонту. Угол между поверхностью камня и горизонтом  $\beta \ll 1$  (см. рис.).

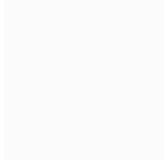
$\alpha \ll 1$  к горизонту. Угол между поверхностью камня и горизонтом  $\beta \ll 1$  (см. рис.).



Точное описание соударения камня о воду требует нахождения течений, возникающих в процессе удара, путём решения уравнения Навье-Стокса. Данная задача является достаточно трудной и может быть решена лишь численными методами. Рассмотрим упрощённую модель взаимодействия камня с водой:

\* при ударе на камень (если он не погрузился в воду полностью) действует сила вязкого трения, которая определяется выражением

$$F_B = C_n \rho v^2 S \vec{n} + C_\tau \rho v^2 S \vec{\tau},$$



где  $\rho$  — плотность воды,  $v$  — модуль скорости камня,  $S$  — площадь погруженной части камня,  $C_n$  и  $C_\tau$  — безразмерные коэффициенты, имеющие одинаковый порядок величины и зависящие от углов  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$  — единичные векторы, указанные на рисунке;

- в процессе соударения скорость камня и угол  $\alpha$  меняются незначительно, а угол  $\beta$  не меняется вовсе; - в силу последнего приближения величины  $C_n$  и  $C_\tau$  постоянны в процессе удара; - начала отсчёта Oz и Oх выберем в месте, где камень начинает соприкасаться с водой; - в силу наличия набегающих волн, обтекающих камень при ударе, будем считать, что площадь погруженной части камня линейно зависит от глубины погружения:  $S = a|z|$ , величину  $a$  считайте известной.

2.1. Запишите уравнение движения камня в проекции на оси X и Z. Упростите данные уравнения с учётом указанных приближений. 2.2. Покажите, что в любой момент времени проекции силы сопротивления воды связаны соотношением  $F_{Bx} = -\mu F_{Bz}$ . Получите выражение для коэффициента  $\mu$ . 2.3. Найдите зависимость координаты нижней точки камня от времени  $z(t)$ . 2.4. Найдите время соударения камня с водой  $t_0$ .

Пусть масса камня  $M = 0,1$  кг, скорость перед ударом  $v_0 = 10$  м/с, углы  $\alpha = \beta = 10^\circ$ , для данных углов и формы камня  $a = 60$  см, площадь поверхности камня  $S_0 = 100$  см<sup>2</sup> (вся поверхность), коэффициенты  $C_n = C_\tau = 0,5$ , плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>.

2.5. Для указанных параметров вычислите время соударения  $t_0$  и расстояние  $l_0$ , пройденное камнем вдоль оси X за время соударения. 2.6. Найдите среднюю проекцию равнодействующей силы, действующей на камень, на ось X  $\langle F_x \rangle$ . 2.7. Отскочит ли камень при указанных параметрах? Если да, то с какой конечной скоростью и под каким углом к горизонту? 2.8. Можно ли в данной модели воду считать твёрдым телом?

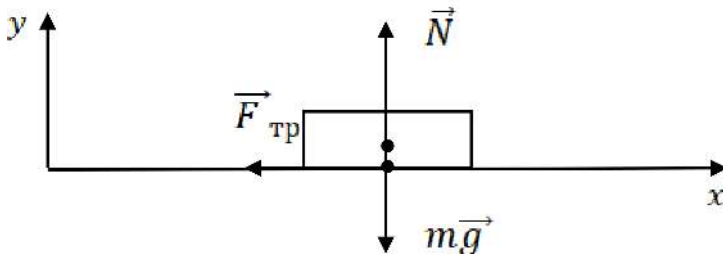
Подсказка.

-  $\langle \sin \varphi \rangle_{\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]} = \frac{2}{\pi}$ .

**Решение**

**Задание 3. «Блинчики» на воде.**

**Часть 1. Отскок от земли**



1.1. При ударе на камень действуют три силы: тяжести  $m\vec{g}$ , нормальной реакции  $\vec{N}$  и трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Сила трения в данном случае является силой трения скольжения и определяется по закону Кулона-Амонтона:  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . На основании второго закона Ньютона для процесса соударения можем записать следующую систему:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta p_y}{\Delta t} &= N - mg \\ \frac{\Delta p_x}{\Delta t} &= -\mu N\end{aligned}\quad (1)$$

Учитывая упругость удара и пренебрегая импульсом силы тяжести перепишем (1) в виде

$$\begin{aligned}2mv_0 \sin \alpha &= N \Delta t \\ m(v_0 \cos \alpha - v'_x) &= \mu N \Delta t\end{aligned}\quad (2)$$

где  $v'$  – скорость тела после удара. Избавляясь от  $N \Delta t$ , получим  $v'_x = v_0(1 - 2\mu \sin \alpha)$ . Теперь не составляет труда найти модуль конечной скорости и угол  $\beta$ :

$$\begin{aligned}v' &= \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = v_0(1 - 2\mu \sin \alpha) \\ \beta &= \arctg\left(\frac{v'_y}{v'_x}\right) = \arctg\left(\frac{\tg \alpha}{1 - 2\mu \tg \alpha}\right)\end{aligned}\quad (3)$$

Отметим, что при  $\mu > \frac{\tg \alpha}{2}$  шарик отскочит вертикально ( $\beta = \frac{\pi}{2}$ ) с конечной скоростью  $v' = v_0 \sin \alpha$ .

## Часть 2. Отскок от воды

2.1. Проекция результирующей силы на ось Z, действующей на камень, определяется соотношением

$$F_z = -Mg + \rho v^2 S (C_n \cos \beta - C_\tau \sin \beta). \quad (4)$$

Воспользуемся приближениями, указанными в условии задачи. Поскольку скорость камня меняется незначительно, в (4) заменим  $v$  на  $v_0$ . Для удобства введём обозначение  $C_z = C_n \cos \beta - C_\tau \sin \beta$ . Площадь поверхности камня, соприкасающаяся с водой, с учётом указанного в условии приближения, определяется уравнением

$$S = a|z|. \quad (5)$$

С учётом указанных замечаний перепишем (4) в виде (6):

$$F_z = -Mg + \rho C_z v_0^2 a |z|. \quad (6)$$

Воспользовавшись вторым законом Ньютона, получим

$$Ma_z = -Mg + \rho C_z v_0^2 a |z|. \quad (7)$$

Раскрыв модуль ( $|z| = -z$ ) и разделив уравнение (7) на массу камня, получим уравнение движения

$$a_z = -g - \frac{\rho C_z v_0^2 a}{M} z. \quad (8)$$

Проекция результирующей силы на ось X, действующей на камень, определяется соотношением

$$F_x = -\rho v^2 S (C_n \sin \beta + C_\tau \cos \alpha). \quad (9)$$

Сделав пренебрежения, аналогичные п. 2.1 и введя обозначение  $C_x = C_n \sin \beta + C_\tau \cos \beta$ , пользуясь формулой (5) получим

$$Ma_x = \rho C_x v_0^2 a z. \quad (10)$$

2.2. Сравнивая проекции сил сопротивления воды в (7) и (10), получим  $F_{Bx} = -\frac{C_x}{C_z} F_{Bz}$ . Таким образом

$$\mu = \frac{C_x}{C_z} = \frac{C_n \sin \beta + C_\tau \cos \beta}{C_n \cos \beta - C_\tau \sin \beta}.$$

2.3. Перепишем уравнение (8) в виде

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = -g, \quad (11)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{\rho C_z v_0^2 a}{M}$ . Очевидно (11) – уравнение гармонических колебаний с циклической частотой  $\omega_0$ , при этом положение равновесия смещено относительно  $z = 0$ . Будем искать решение уравнения (11) в виде (12):

$$z(t) = z_0 + A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (12)$$

где  $z_0$  имеет смысл координаты положения равновесия, а  $A$  – амплитуды колебаний. Первая и вторая производные по времени от (12) имеют смысл вертикальных компонент скорости и ускорения камня соответственно:

$$\frac{dz}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Подставим  $z(t)$  в виде (12) в уравнение (11):

$$-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_0\omega_0^2 + A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -g,$$

откуда  $z_0 = -\frac{g}{\omega_0^2}$ .

Для нахождения амплитуды и начальной фазы колебаний воспользуемся начальными условиями:  $z(0) = 0$ ,  $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = -v_0 \sin \alpha$ :

$$0 = -\frac{g}{\omega_0^2} + A \cos \varphi$$

$$-v_0 \sin \alpha = -A\omega_0 \sin \varphi$$

откуда

$$A = \frac{g}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}}$$

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\omega_0 v_0 \sin \alpha}{g} \right) \quad (13)$$

Окончательно

$$z(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \cos \left( \omega_0 t + \arctg \left( \frac{\omega_0 v_0 \sin \alpha}{g} \right) \right). \quad (14)$$

2.4. Время соударения  $t_0$  является корнем уравнения  $z(t_0) = 0$ . Одним из корней данного уравнения является начальный момент времени  $t = 0$ , при котором фаза колебаний равна начальной фазе  $\varphi$ . Ясно, что и в момент времени  $t_0$  косинус в выражении (14) будет принимать то же значение, что и в начальный момент. Тогда фаза колебаний в момент времени  $t_0$  равна  $2\pi - \varphi$ :

$$\omega_0 t_0 + \varphi = 2\pi - \varphi$$

Из последнего уравнения находим выражение для времени соударения:

$$t_0 = \frac{2\pi - 2\varphi}{\omega_0}. \quad (15)$$

2.5. Для указанных в условии параметров  $\omega_0 \approx 4,93 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\varphi \approx 89,3^\circ$ . Близость начальной фазе к  $90^\circ$  позволяет нам утверждать, что  $z_0 \approx A$  и движение камня в воде происходит приблизительно половину периода колебаний, т.е.

$$t_0 \approx \frac{\pi}{\omega_0} \approx 6,4 \text{ мс}. \quad (16)$$

Расстояние  $l_0$  с учётом малого изменения скорости камня находится как

$$l_0 \approx v_0 \cos \alpha t_0 \approx 6,3 \text{ см}. \quad (17)$$

2.6. Проекция результирующей силы на ось X, действующей на камень, определяется соотношением (10). Подставляя сюда зависимость  $z(t)$  из (12), получим

$$F_x = \rho v_0^2 a C_x \left( -\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \cos \left( \omega_0 t + \arctg \left( \frac{\omega_0 v_0 \sin \alpha}{g} \right) \right) \right). \quad (18)$$

Заметим, что для указанных параметров  $z_0 \approx A$  и  $\varphi \approx 90^\circ$ , поэтому

$$F_x = -\frac{\rho g v_0^2 a C_x}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \sin \omega_0 t.$$

Тогда уравнение движения камня вдоль оси X с учётом выражения для  $\omega_0$  имеет вид

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{C_x}{C_z} M g \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \sin \omega_0 t. \quad (19)$$

Для вычисления средней силы воспользуемся подсказкой в условии:

$$\langle F_x \rangle = -\frac{C_x}{C_z} M g \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \langle \sin \omega_0 t \rangle_{t \in [0, \frac{\pi}{\omega_0}]} = -\frac{2C_x}{\pi C_z} M g \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \approx -77,8 \text{ Н.}$$

2.7. Камень может не отскочить от воды по двум причинам: в процессе соударения камень полностью опустится под воду, после чего наша модель перестает адекватно описывать процесс соударения. Камень при этом утонет. Вторая причина — полная потеря горизонтальной компоненты импульса в процессе удара. Запишем данные условия в виде уравнений:

$$\begin{aligned} |z_{\max}| &< \frac{S_0}{a} \\ |\langle F_x \rangle| t_0 &< M v_0 \cos \alpha \end{aligned} \quad (20)$$

Для параметров, приведенных в условии  $|z_{\min}| = 3,5 \text{ мм}$ ,  $\frac{S_0}{a} = 1,7 \text{ см}$ ,  $|\langle F_x \rangle| t_0 = 0,50 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $M v_0 \cos \alpha = 0,98 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Таким образом, оба условия выполняются и камень отскакивает от воды.

Горизонтальную компоненту скорости после определяется как

$$v'_x = \frac{M v_0 \cos \alpha + \langle F_x \rangle t_0}{M} \approx 4,89 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Поскольку вертикальная компонента скорости не меняется по модулю, нетрудно найти конечную скорость и угол отскока  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{v_x'^2 + (v_0 \sin \alpha)^2} \approx 5,19 \frac{\text{м}}{\text{с}} \\ \gamma &= \arctg \left( \frac{v_0 \sin \alpha}{v'_x} \right) \approx 19,6^\circ \end{aligned} \quad (21)$$

2.8. Вычислим коэффициент  $\mu$  из п. 2.2. и подставим в формулу (3), определяющую конечную скорость и угол отскока тела от твёрдой поверхности:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{C_n \sin \beta + C_\tau \cos \beta}{C_n \cos \beta - C_\tau \sin \beta} \approx 1,43, \\ v' &= v_0 (1 - 2\mu \sin \alpha) \approx 5,03 \frac{\text{м}}{\text{с}} \\ \gamma &= \arctg \left( \frac{\text{tg } \alpha}{1 - 2\mu \text{tg } \alpha} \right) \approx 19,6^\circ \end{aligned} \quad (22)$$

Сравнивая значения (21) и (22) можно заключить, что в данной модели вода действительно ведёт себя как твёрдое тело.