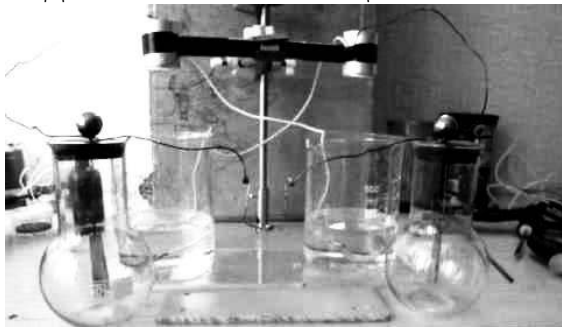


Условие

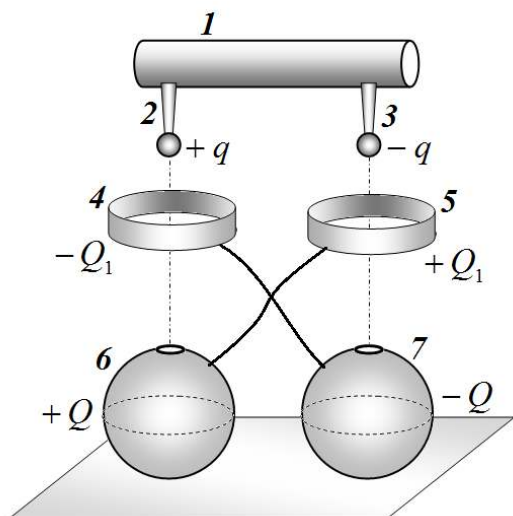
Задание 2. Капельница Кельвина.



Капельница Кельвина — электростатический генератор, изобретённый Уильямом Томсоном (лордом Кельвином) в 1867 году. Простая конструкция позволяет, тем не менее, получить напряжения порядка 10 кВ.

В настоящее время имеется много различных модификаций этого прибора, который в настоящее время рассматривается как забавная игрушка.

В данном задании рассмотрим следующую упрощенную модель этого устройства.



Цилиндрический сосуд 1, заполненный водой, снабжен двумя небольшими трубочками – капельницами 2 и 3, из которых с некоторым интервалом падают капли. Капли пролетают через проводящие кольца 4 и 5 и попадают в проводящие сферические сосуды 6 и 7 с небольшими отверстиями. Сосуды соединены с кольцами «крест-накрест».

Принцип работы этого электростатического генератора очевиден: - изначально сосудам 6 и 7 сообщают небольшие электрические заряды противоположного знака $+Q$ и $-Q$; радиусы этих сосудов равны R . Электростатическим воздействием одного сосуда на другой следует пренебречь; - часть этих зарядов $\pm Q_1$ перетекает на кольца 4 и 5; два кольца служат обкладками конденсатора, электрическая емкость которого равна C ; так как эта емкость мала, то следует считать, что $|Q_1| \ll |Q|$; Радиусы колец равны r , они находятся на расстоянии h от концов трубок с каплями, толщина колец значительно меньше из радиусов; - электрическое поле колец индуцирует на каплях заряды $\pm q$, радиусы капель равны a ; расстояние от сосудов 6 и 7 до капель достаточно велико, поэтому влиянием поля сосудов на капли можно пренебречь; Расстояние между каплями также значительно больше радиусов капель; сосуд с водой 1 заземлен;

Таким образом, капли приобретают электрический заряд, который при попадании капли в

сосуд передается соответствующему сосуду, увеличивая его заряд.

1. Пусть заряды каждого сосуда равны $\pm Q$. Найдите, какие заряды $\pm Q_1$ возникают на кольцах.
2. Рассчитайте электрические заряды капель $\pm q$. Величину этого заряда можно представить в виде $q = \alpha Q$, где α - некоторый безразмерный коэффициент. Запишите формулу для этого коэффициента.
3. Обозначим заряды сосудов до падения первых капель $\pm Q_0$. Найдите заряды этих сосудов, после того, как в них упало по N капель. Ответ выразите через коэффициент α .

Решение

Задание 2. Капельница Кельвина. Решение.

1. Если заряд сферы равен Q , то ее потенциал равен

$$\varphi = k \frac{Q}{R}, \quad (1)$$

Где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Поэтому разность потенциалов между кольцами равна

$$\Delta\varphi = 2k \frac{Q}{R}. \quad (2)$$

Тогда электрический заряд каждого кольца равен (из определения емкости конденсатора):

$$C = \frac{Q_1}{\Delta\varphi} \Rightarrow Q_1 = C\Delta\varphi = \frac{2kC}{R}Q. \quad (3)$$

2. Так как верхний сосуд заземлен, то потенциал всех его точек (в том числе и капель) равен нулю. Потенциал капли равен сумме потенциалов поля, создаваемых зарядом на ближайшем кольце, и поля, создаваемого зарядом на самой капле. Потенциал поля кольца в точке нахождения капли легко определить, используя принцип суперпозиции:

$$\varphi_1 = k \frac{Q_1}{\sqrt{r^2 + h^2}}. \quad (4)$$

Такой же по модулю (но противоположный по знаку) потенциал создается зарядом на капле

$$\varphi_1 = k \frac{q}{a}. \quad (5)$$

Приравнявая эти выражения, находим заряд капли

$$q = \frac{a}{\sqrt{r^2 + h^2}} Q_1 = \frac{a}{\sqrt{r^2 + h^2}} \frac{2kC}{R} Q. \quad (6)$$

Из этой формулы следует, что безразмерный коэффициент пропорциональности между зарядом капли и зарядом сосуда равен

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{r^2 + h^2}} \frac{2kC}{R}. \quad (7)$$

3. Пусть после попадания $(N - 1)$ капель заряд сосуда равен Q_{N-1} , тогда после падения очередной капли заряд сосуда станет равным

$$Q_N = Q_{N-1} + q = Q_{N-1} + \alpha Q_{N-1} = (1 + \alpha) Q_{N-1}. \quad (8)$$

Из этого выражения следует, что заряд сосуда возрастает в геометрической прогрессии, поэтому

$$Q_N = (1 + \alpha)^N Q_0. \quad (9)$$