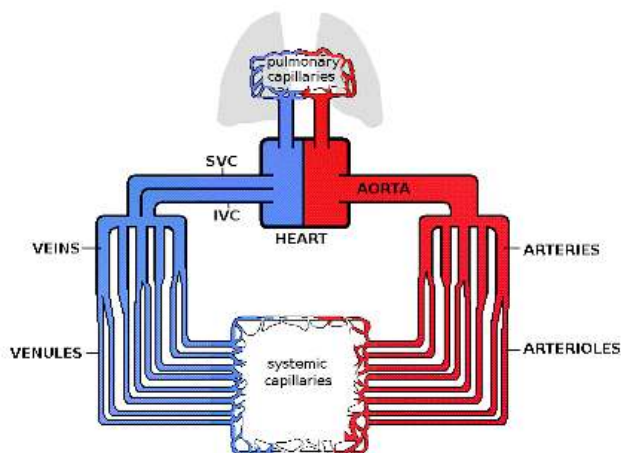


## Условие

### Задание 3. Гемодинамика - артериальная система.



**Гемодинамика** — движение крови по сосудам, возникающее вследствие разности гидростатического давления в различных участках кровеносной системы.

При расчете характеристик движения крови по сосудам будем использовать следующие упрощения: - все сосуды являются цилиндрическими, их форма остается неизменной при изменении давления крови; стенки сосудов не проницаемы для крови; - распределение давлений внутри кровеносной системы стационарно, т.е. не зависит от времени, иными словами вместо регулярных пульсаций, обусловленных сжатием сердца, рассматриваем усредненное по времени распределение давлений, давление, создаваемое сердцем, также считаем постоянным; - объем крови, протекающий в единицу времени через поперечное сечение (эта величина часто называется расход жидкости -  $q$ ) цилиндрической трубы радиуса  $R$  и длины  $L$ , описывается формулой Пуазейля:

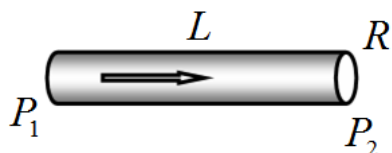
$$q = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P, \quad (1)$$

где  $\Delta P$  - разность давлений на концах трубы,  $\eta$  - коэффициент вязкости протекающей жидкости, если жидкость идеальная (в которой силами вязкого трения пренебрегают), то  $\eta = 0$ ; можно считать, что формула (1) применима и для изогнутых труб; - кровь является несжимаемой вязкой жидкостью, плотность которой  $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ; вязкость крови  $\eta = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ; - суммарный расход крови в большом круге кровообращения равен  $q_0 = 6,0 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$ ; - давление в 1 мм рт. ст. равно 133 Па.

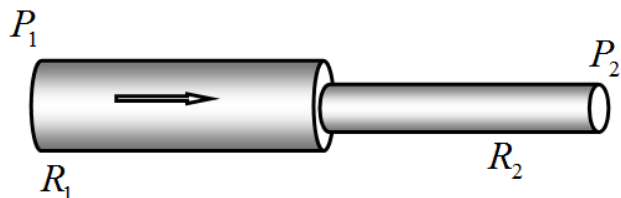
Артериальная система человека (по которой кровь поступает от сердца к мышцам и другим органам) состоит из системы разветвляющихся сосудов: аорта, крупные артерии, мелкие артерии, капилляры. Будем считать, что геометрические размеры всех сосудов в этих группах одинаковы; каждый более крупный сосуд разветвляется в одном месте на более мелкие сосуды (см. рисунок на заставке к задаче). Характеристики сосудов артериальной системы приведены в Таблице 1 Листов ответов. В этой таблице:  $d_i$  - диаметр сосуда,  $l_i$  - длина сосуда;  $n_i$  - число сосудов данной группы.

#### Часть 1. Предварительные расчеты.

Жидкость вязкости  $\eta$  протекает по цилиндрической трубе радиуса  $R$  и длины  $L$ , расход жидкости равен  $q$ .



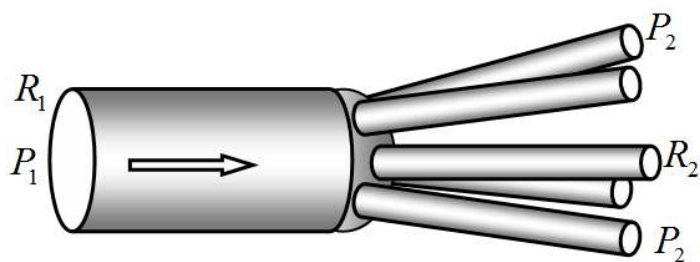
1.1 Получите формулы, описывающие следующие характеристики движения жидкости: 1.1.1 Среднюю по поперечному сечению скорость течения жидкости. 1.1.2 Среднее время движение порции жидкости по трубе. 1.1.3 Разность давлений жидкости на концах трубы  $\Delta P = P_1 - P_2$ . Жидкость протекает по трубе, состоящей из двух сочлененных труб, радиусы которых равны  $R_1$  и  $R_2$ , длины этих труб равны  $l_1$  и  $l_2$ . Плотность жидкости  $\rho$ , вязкостью жидкости можно пренебречь  $\eta \approx 0$ . Расход жидкости равен  $q$ .



1.2 Найдите, чему равна разность давлений  $\delta P = P_1 - P_2$  на концах трубы. Укажите область, в которой происходит этот скачок давлений.

Далее можете считать, что полученная формула для скачка давления применима и для вязких жидкостей.

По описанной выше сочлененной трубе протекает жидкость, вязкость которой равна  $\eta$ . На концах трубы поддерживается постоянная разность давлений  $\Delta P = P_1 - P_2$ .



1.3 Рассчитайте расход жидкости по этой трубе. Ответ выразите, через разность давлений, вязкость жидкости и геометрические размеры трубы.

Жидкость, вязкостью которой можно пренебречь, протекает по системе труб, состоящей из одной трубы радиуса  $R_1$  и  $n$  одинаковых труб меньшего радиуса  $R_2$ . Расход жидкости через эту систему (равный расходу в первой трубе) равен  $q$ .

1.4 Найдите, чему равен скачок давлений на стыке труб  $\delta P = P_1 - P_2$ .

Полученную формулу также можно применять для вязкой жидкости.

## Часть 2. Характеристики кровотока в артериальной системе человека.

Будем считать, что артериальная система заканчивается на середине капилляров (далее начинается венозная система).

2.1 Используя приведенные в условии данные, рассчитайте для каждой группы сосудов следующие характеристики (численные результаты занесите в соответствующие графы Таблицы 2 в Листах ответов): 2.1.1 Среднюю скорость течения крови по сосудам этой группы. 2.1.2 Среднее время движения крови по артериальной системе. 2.1.3 Разность давлений на концах сосудов каждой группы (для капилляров – между началом капилляра и его серединой). 2.1.4 Скачки давлений при переходе от одной группы сосудов к следующей. 2.1.5 Общую разность

давлений в артериальной системе человека, от входа аорты до середины капилляра.

2.2 Сравните полученное значение разности давлений со средним сердечным давлением  $p \approx 100$  мм рт. ст. Кратко объясните возникшее противоречие – выскажите предположение о том, как все-таки работает кровеносная система?



## Республиканская физическая олимпиада 2023 года

(Заключительный этап)

### Теоретический тур

#### Листы ответов

#### Решение

### Задание 10-2. Гемодинамика - артериальная система. Решение.

#### Часть 1. Предварительные расчеты.

##### 1.1 Формулы:

1.1.1 Расход жидкости может быть выражен формулой

$$q = vS, \quad (1)$$

где  $S = \pi R^2$  - площадь поперечного сечения трубы,  $v$  - средняя по поперечному сечению скорость течения, которая может быть выражена через расход жидкости, как

$$v = \frac{q}{S} = \frac{q}{\pi R^2}. \quad (2)$$

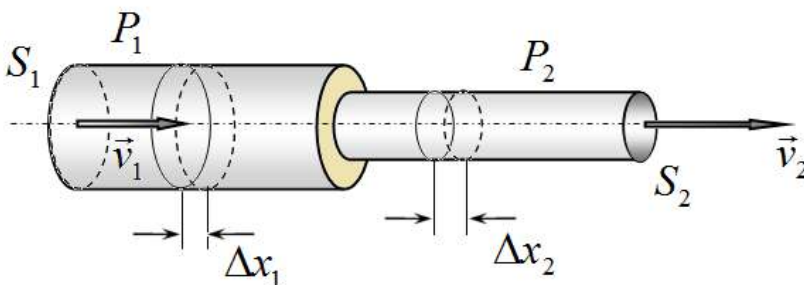
1.1.2 Очевидно, что время движения жидкости по трубе равно

$$t = \frac{L}{v} = \frac{\pi R^2 L}{q}. \quad (3)$$

Это же выражение может быть представлено, как объем трубы, деленный на расход жидкости  $t = \frac{V}{q}$ .

1.1.3 Из формулы Пуазейля легко выразить разность давлений через расход жидкости

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} q. \quad (4)$$



1.2 Обозначим скорость течения жидкости в первой трубе  $v_1$ , во второй -  $v_2$ ; площади поперечных сечений -  $S_1, S_2$ , давления в трубах  $P_1, P_2$ . Так как жидкость является идеальной, то давление изменяется скачком только в области стыка двух труб. Рассмотрим порцию

жидкости, находящуюся между двумя произвольно выбранными сечениями (одно в широкой части трубы, второе в узкой части). Пусть за малый промежуток времени первое сечение сместилось на расстояние  $\Delta x_1$ , тогда второе сечение сместится на расстояние  $\Delta x_2$ . Так как жидкость несжимаема, то выполняется соотношение

$$\Delta V = S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2. \quad (5)$$

Эта величина имеет смысл объема, протекшего через поперечное сечение трубы за рассматриваемый промежуток времени. Скорость этой порции жидкости изменилась от  $v_1$  до  $v_2$ . Следовательно, возросла и кинетическая энергия этой порции жидкости. Изменение кинетической энергии обусловлено работой внешних сил (т.е. сил давления жидкости на выделенную порцию), поэтому можно записать:

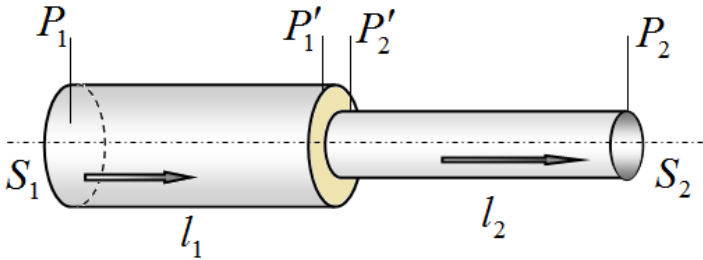
$$P_1 S_1 \Delta x_1 - P_2 S_2 \Delta x_2 = \frac{1}{2} \rho S_1 \Delta x_1 (v_2^2 - v_1^2) \quad (6)$$

Учитывая соотношение (5), получим уравнение (которое фактически является уравнением Бернулли):

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \quad (7)$$

Скорости течения жидкости выразим через расход жидкости  $v = \frac{q}{S}$  и подставим в уравнение (7):

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho q^2 \left( \frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left( \frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) \quad (8)$$



**1.3** При течении вязкой жидкости давление изменяется и в пределах трубы постоянного течения. Обозначим давления в различных сечениях, как показано на рисунке.

Запишем уравнения для изменения давлений на всех участках составной трубы (используя формулы (4) и (8)):

$$\begin{aligned} P_1 - P_1' &= \frac{8\eta l_1}{\pi R_1^4} q \\ P_1' - P_2' &= \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left( \frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) \\ P_2' - P_2 &= \frac{8\eta l_2}{\pi R_2^4} q \end{aligned} \quad (9)$$

И просуммируем эти выражения:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left( \frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) + \frac{8\eta l_1}{\pi R_1^4} q + \frac{8\eta l_2}{\pi R_2^4} q \quad (10)$$

В результате чего получаем квадратное уравнение, правда с громоздкими коэффициентами:

$$\frac{1}{2\pi^2}\rho\left(\frac{1}{R_2^4}-\frac{1}{R_1^4}\right)q^2+\frac{8\eta l}{\pi}\left(\frac{l_1}{R_1^4}+\frac{l_2}{R_2^4}\right)q-\Delta P=0 \quad (11)$$

При решении этого уравнения следует выбрать положительный корень:

$$q=\frac{\sqrt{b^2+a\Delta P}-b}{a} \quad (12)$$

где

$$a=\frac{1}{2\pi^2}\rho\left(\frac{1}{R_2^4}-\frac{1}{R_1^4}\right); \quad b=\frac{4\eta l}{\pi}\left(\frac{l_1}{R_1^4}+\frac{l_2}{R_2^4}\right)$$

**1.4** При решении этой задачи можно повторить все рассуждения п.1.2, а в окончательной формуле (8) под  $S_2$  следует понимать суммарную площадь всех присоединенных труб, поэтому

$$\delta P=P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho q^2\left(\frac{1}{S_2^2}-\frac{1}{S_1^2}\right)=\frac{1}{2\pi^2}\rho q^2\left(\frac{1}{n^2R_2^4}-\frac{1}{R_1^4}\right). \quad (13)$$

Заметим, что эта разность давлений может быть отрицательной.

## **Часть 2. Характеристики кровотока в артериальной системе человека.**

**2.1.1 – 2.1.5** Для расчета требуемых характеристик следует воспользоваться уже полученными формулами, которые следует слегка модернизировать с учетом числа сосудов в каждой группе. Приведем эти формулы, необходимые для расчетов: Расход крови через один сосуд в группе:

$$q_i=\frac{q_0}{n_i}, \quad (14)$$

Где  $q_0=6,0\frac{\text{л}}{\text{мин}}=6,0\frac{10^{-3}\text{ м}^3}{60\text{ с}}=1,0\cdot 10^{-4}\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$  - суммарный расход крови.

Площадь поперечного сечения сосуда в группе

$$S_i=\frac{\pi d_i^2}{4} \quad (15)$$

Средняя скорость течения крови в сосуде:

$$v_i=\frac{q_i}{S_i}. \quad (16)$$

Время движения через сосуд

$$t_i=\frac{l_i}{v_i}. \quad (17)$$

Разность давлений на концах сосуда

$$\Delta P_i=\frac{8\eta l_i}{\pi R_i^4}q_i=\frac{8\pi\eta l_i}{(\pi R_i^2)^2}q_i=8\pi\eta\frac{l_i}{S_i^2}q_i. \quad (18)$$

Скачок давлений на стыке сосудов

$$\delta P_i = \frac{1}{2\pi^2} \rho q_i^2 \left( \frac{1}{\left(\frac{n_{i+1}}{n_i}\right)^2 R_{i+2}^4} - \frac{1}{R_i^4} \right) = \frac{\rho q_0^2}{2} \left( \frac{1}{(n_{i+1} S_{i+1})^2} - \frac{1}{(n_i S_i)^2} \right). \quad (19)$$

Интересно отметить, что при замкнутом круге обращения (когда суммарные площади сечений в начале и конце цикла равны) сумма этих скачков давлений равна нулю. Суммарные характеристики рассчитываются очевидным способом, как суммы соответствующих характеристик в каждой группе.

Результаты расчетов по приведенным формулам приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Расчетные характеристики артериальной системы человека

| Группа сосудов  | Средняя скорость течения крови, $v$ , м/с | Время движения $t$ , с | Разность давлений на концах сосуда $\Delta P$ , Па | Скачок давления скорость $t$ , с давлений на при переходе в следующую группу $\delta P$ , Па |
|-----------------|-------------------------------------------|------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Аорта           | 0,54                                      | 1,10                   | 180                                                | -36                                                                                          |
| Крупные артерии | 0,47                                      | 0,99                   | 4560                                               | -83                                                                                          |
| Мелкие артерии  | 0,24                                      | 0,25                   | 7450                                               | -29                                                                                          |
| Капилляры       | 0,0012                                    | 0,51                   | 1400                                               | -                                                                                            |

Общее время движения крови по артериальной системе равно 2,0 с. Разность давлений на входе и выходе из артериальной системы (сумма двух последних столбцов) равно 13 кПа, что примерно равно 100 мм рт. ст. Следует отметить, что скачки давлений в местах разветвления сосудов, во-первых, отрицательны (т.к. общая площадь поперечных сечений сосудов в каждой группе увеличивается); во-вторых, не слишком значительны.

**2.2** Разумно считать, что разность давлений в венозной системе также примерно равна 100 мм рт. ст. Поэтому суммарное давление, которое должно создавать сердце, примерно в два раза превышает реальное сердечное давление. Основная причина такого существенного расхождения заключается в том, что сосуды функционируют гораздо сложнее, чем жесткие трубки. Они проходят через различные мышцы тела, которые могут способствовать лучшему протеканию крови, т.е. работают как своеобразные «микронасосы».