

Условие

Задание 1. Термометр Галилея.



Термометр Галилея — запаянный стеклянный цилиндр, наполненный жидкостью, в которой плавают стеклянные сосудики-буйки. К каждому такому сферическому поплавку прикреплена снизу золотистая или серебристая бирка с выбитым на ней значением температуры. В зависимости от размера термометра количество поплавков внутри бывает от 3 до 11. В настоящее время термометр представляет эстетическую ценность в качестве эффектного предмета интерьера.

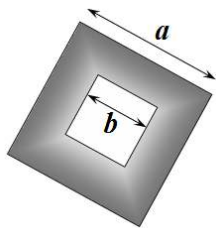
При изменении температуры изменяются плотности жидкости и материала поплавков. Поэтому изменяются условия плавания поплавков — они могут либо тонуть, либо всплывать. Конечно, точно измерять температуру с помощью этого термометра невозможно, но детали прибора должны быть изготовлены с высокой точностью. В данной задаче вам необходимо рассчитать характеристики этой забавной игрушки.

Часть 1. Тепловое расширение.

При нагревании тела все его линейные размеры тела изменяются одинаково. Во многих случаях относительное изменение размеров тела пропорционально изменению температуры и описывается формулой

$$l = l_0(1 + \alpha(t - t_0)), \quad (1)$$

где l - длина тела при температуре t , l_0 - длина тела при температуре t_0 , α - коэффициент линейного расширения вещества, из которого изготовлено тело. По аналогичному закону изменяются все линейные размеры тела.



1.1 Квадратная металлическая пластина изготовлена из металла с коэффициентом теплового расширения α . В середине пластины проделано квадратное отверстие. При температуре t_0 длина стороны внешнего квадрата равна a , длина стороны отверстия - b . Пластину нагревают

на Δt градусов. Укажите, что произойдет с площадью отверстия (увеличится, уменьшится, не изменится). Если площадь отверстия изменится, то найдите ее изменение ΔS .

Изменение плотности однородного тела может быть описано формулой

$$\rho = \rho_0(1 + \gamma(t - t_0)), \quad (1)$$

где V - объем тела при температуре t , V_0 - длина тела при температуре t_0 , γ -тепловой коэффициент изменения плотности вещества, из которого изготовлено тело.

1.2 Выразите коэффициент теплового изменения плотности γ через коэффициент линейного расширения α . Считайте эти коэффициенты малыми.

Часть 2. Массы поплавков.

Здесь и далее будем считать, что сосуд термометра Галилея заполнен дистиллированной водой. Тепловое расширение воды носит сложный характер и не подчиняется линейным законам (1) и (2). В Таблице 1 в Листах ответов приведены значения удельного объема воды v_0 при различных температурах t . Удельным объемом называется

2

объем единицы массы вещества. Будем считать, что поплавки являются полыми стеклянными шариками, диаметр которых при температуре $t_0 = 20,0^\circ$ равен $D = 2,000$ см. Шарики частично заполнены подкрашенной водой, масса каждого шарика-поплавка (вместе с водой внутри) равна $m_0 = 4,000$ г. К шарикам подвешивают золотую бирку, с выбитым значением температуры. Плотность золота при температуре $t_0 = 20,0^\circ$ равна $\rho_1 = 19,32 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Назовем температурой всплытия t^* поплавка такую температуру, при которой поплавок (с биркой) может находиться в состоянии равновесия внутри жидкости. Именно эту температуру указывает на бирках поплавков.

2.1 Поплавок находится внутри жидкости, находящейся при температуре всплытия. Что произойдет с шариком (начнет тонуть, начнет всплывать, останется в равновесии), если температура повысится?

2.2 На бирках поплавков указаны температуры всплытия. При некоторой температуре часть шариков плавает у поверхности, часть затонула. Как определить температуру термометра по числам, указанным на бирках? Как оценить погрешность измерения температуры в этом случае?

Для предварительного расчета пренебрежем тепловым расширением стекла поплавка и золота бирки.

2.3 Для каждого значения температуры, приведенной в таблице 1, рассчитайте значение массы бирки m_1 , чтобы для этого поплавка указанная температура была температурой всплытия. При проведении испытаний оказалось, что термометр имеет систематическую погрешность. Для ее исправления разработчики решили учесть тепловое расширение стекла, из которого изготовлены поплавки, а тепловым расширением золота по-прежнему пренебрегать. Коэффициент линейного теплового расширения стекла равен $\alpha = 9,200 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

2.4 Рассчитайте, на сколько надо изменить массу Δm_1 каждой бирки, чтобы исключить погрешность прибора.

2.5 Рассчитайте общую массу золота, которая пойдет на изготовление термометра, с 5 поплавками, рассчитанными на температуры, указанные в Таблице 1.

В листе ответов приведите краткий вывод расчетных формул, численные результаты расчета масс бирок m_1 и их изменения Δm_1 занесите в третий и четвертый столбцы таблицы 1.

Решение

Задание 1. Термометр Галилея. (Решение).

Часть 1. Тепловое расширение.

1.1 Все линейные размеры, в том числе и радиус отверстия увеличатся, поэтому площадь отверстия также **увеличится**. Изменение площади отверстия равно

$$\Delta S = (Rb(1 + \alpha\Delta t))^2 - b^2 \approx 2b\alpha\Delta t. \quad (1)$$

1.2 Рассмотрим куб с длиной ребра a_0 , изготовленный из рассматриваемого материала. Длина ребра куба изменяется по закону

$$a = a_0(1 + \alpha\Delta t). \quad (2)$$

Тогда объем куба станет равным

$$V = a^3 = a_0^3(1 + \alpha\Delta t)^3 \approx V_0(1 + 3\alpha\Delta t). \quad (3)$$

При нагревании тела его масса не изменяется, поэтому плотность тела станет равной

$$\rho = \frac{m}{V_0(1 + 3\alpha\Delta t)} \approx \frac{m}{V_0}(1 - 3\alpha\Delta t) = \rho_0(1 - 3\alpha\Delta t).$$

Здесь мы использовали приближенную формулу $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$. Из сравнения с формулой, приведенной в условии, находим, что

$$\gamma = -3\alpha. \quad (4)$$

Часть 2. Массы поплавков.

2.1 Поплавок находится в равновесии, если сила тяжести уравновешивается выталкивающей силой Архимеда. При увеличении температуры плотность воды уменьшается, поэтому уменьшается сила Архимеда, поэтому шарик начнет **тонуть**.

2.2 Плавать будут те поплавки, для которых температура всплытия, больше температуры воды, а утонут те, у которых указанная на бирках температура меньше температуры воды. Поэтому температура воды лежит в диапазоне от максимальной среди плавающих поплавков, до минимальной среди утонувших поплавков. В качестве измеренной температуры можно взять **среднее значение этих температур**. В качестве оценки погрешности разумно взять **половину разности этих температур**.

2.3 При температуре всплытия сила тяжести шарика уравновешивается силой Архимеда, которая изменяется при изменении температуры:

$$mg = F_A \quad (5)$$

Сила Архимеда рассчитывается по формуле

$$F_A = \rho_0 V g = \frac{V g}{v_0}, \quad (6)$$

Здесь

$$V = V_{\text{шарик}} + V_{\text{бирки}} = \frac{\pi D^3}{6} + \frac{m_1}{\rho_1}. \quad (7)$$

- объем поплавка с биркой.

Из этих формул, следует, что масса поплавка с биркой должна быть равна

$$m_0 + m_1 = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\pi D^3}{6} + \frac{m_1}{\rho_1} \right) \quad (8)$$

Из этого уравнения находим необходимую массу бирки

$$m_1 = \frac{\frac{1}{v_0} \frac{\pi D^3}{6} - m_0}{\left(1 - \frac{1}{\rho_1 v_0} \right)} \quad (8)$$

2.4. При учете теплового расширения стеклянного поплавка, формула (8) преобразуется к виду (связанному с изменением диаметра поплавка)

$$m_1 = \frac{\frac{1}{v_0} \frac{\pi D^3}{6} (1 + 3\alpha(t - t_0)) - m_0}{\left(1 - \frac{1}{v_0 \rho_1} \right)} \quad (9)$$

Из формул (8) -(9) следует, что массу каждой бирки следует увеличить на

$$\Delta m_1 = \frac{\frac{\pi D^3}{6 v_0}}{\left(1 - \frac{1}{v_0 \rho_1} \right)} 3\alpha(t - t_0) \quad (10)$$

Результаты расчетов масс бирок и их изменения, проведенные по формулам (8) и (9) приведены в Таблице.

Таблица результатов расчетов.

$t, ^\circ C$	$\rho \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$m, \text{ г}$	$\Delta m, \text{ мг}$
15	0,99913	0,195	-0,609
20	0,99823	0,191	0,000
25	0,99707	0,186	0,608
30	0,99567	0,180	1,214
35	0,99406	0,173	1,817

2.5 Общая масса золота равна сумме всех чисел в 2 последних столбцах данной таблицы. Она равна

$$m = 0,922 \text{ г} \quad (11)$$