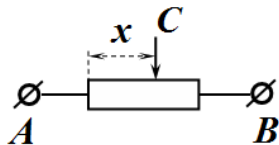


Условие

Задание 3. Изменение мощности.

Реостат электроплитки AB изготовлен из однородной проволоки длины l , полное сопротивление которой равно R_0 . Положение движка реостата C (средний вывод) описывается длиной участка проволоки $|AC| = x$. Обозначим отношение длины участка AC к длине всей проволоки $z = \frac{x}{l}$.

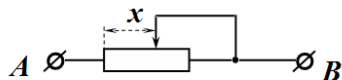


Подключая выводы реостата различными способами можно изменять электрическое сопротивление между клеммами реостата A и B . Введем величину $r = \frac{R_{AB}}{R_0}$, равную отношению сопротивления между клеммами к полному сопротивлению реостата. Электроплитка подключается к источнику постоянного напряжения U_0 . Введем величину $p = \frac{P_{AB}}{U_0^2} R_0$ - отношение мощности электроплитки при подключении ее к клеммам A и B к мощности плитки при подключении полной спирали реостата.

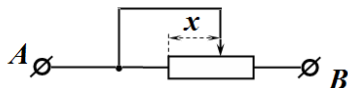
Часть 1. Один реостат.

1.1 – 1.3 На рисунке 1 показаны три различных схемы подключения выводов реостата. Для каждой схемы найдите зависимость величины p от параметра z , определяющего положение среднего вывода. На одном бланке в Листах ответов постройте графики полученных зависимостей.

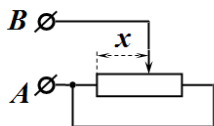
1.1



1.2



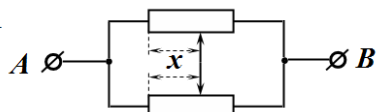
1.3



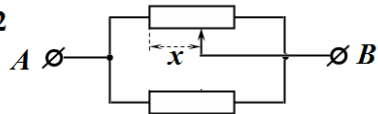
Часть 2. Два реостата.

2.1 – 2.2 Приведенные на рисунках схемы включают по 2 одинаковых, описанных выше, реостата. Считайте, что движки реостатов в схеме 2.1 смещаются одинаково (т.е. $x_1 = x_2 = x$). Для каждой схемы найдите зависимость параметра $p = \frac{P_{AB}}{U_0^2} R_0$ от параметра $z = \frac{x}{l}$.

2.1



2.2



Часть 3. Нелинейный реостат.

В некоторых устройствах (например, для регулировки громкости звука) используют реостаты, сопротивление которых нелинейно зависит от длины участка $|AC| = x$ и описывается

некоторой функцией $R(x)$ (или $R(z)$). Такой реостат включен в цепь по схеме 1.3. В Таблице 1 Листов ответов приведена зависимость сопротивления R_{AB} между клеммами A и B от параметра $z = \frac{x}{l}$. График этой зависимости приведен для иллюстрации.

3.1 Найдите полное сопротивление реостата R_0 .

5

3.2 Используя данные Таблицы 1, рассчитайте значения функции $R(z)$ в заданных точках. Постройте график этой функции.

3.3 Предложите функцию, описывающую рассчитанную зависимость $R(z)$.

3.4 Постройте график зависимости мощности реостата ($p(z) = \frac{P(z)}{U_0^2} R_0$) от положения движка $z = \frac{x}{l}$.

Республиканская физическая олимпиада 2023 года (Заключительный этап)



Теоретический тур

Решение

Задание 3. Изменение мощности. Решения.

Часть 1. Один реостат.

Мощность электроплитки рассчитывается по формуле $P = \frac{U_0^2}{R}$. Поэтому в относительных единицах эта величина равна

$$p = \frac{U_0^2}{R} \frac{R_0}{U_0^2} = \frac{1}{r}. \quad (1)$$

1.1 Так как вторая часть реостата «закорочена», то «работает» только его первая часть, поэтому сопротивлением между клеммами равно

$$R = R_0 \frac{x}{l}. \quad (2)$$

Или в относительных единицах

$$r = z. \quad (3)$$

Тогда мощность плитки равна

$$p = \frac{1}{z}. \quad (4)$$

1.2 В этом случае ситуация обратная, поэтому

$$r = 1 - z. \quad (5)$$

И мощность

$$p = \frac{1}{1 - z}. \quad (6)$$

1.3 Не сложно заметить, что в данном случае два участка реостата подключены к клеммам параллельно, поэтому общее сопротивление равно

$$R = \frac{R_x(R_0 - R_x)}{R_0}.$$

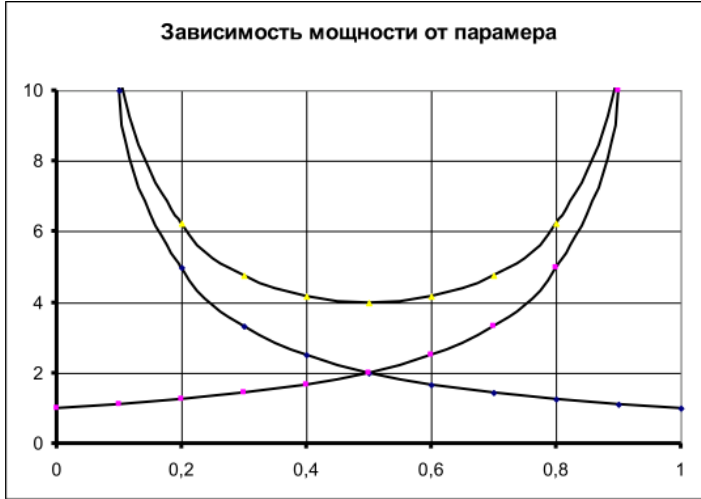
В относительных единицах эта функция имеет вид

$$r = z(1 - z).$$

Формула для мощности имеет вид

$$p = \frac{1}{z(1 - z)}.$$

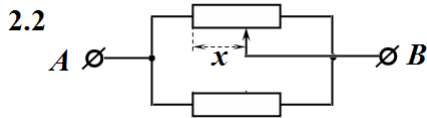
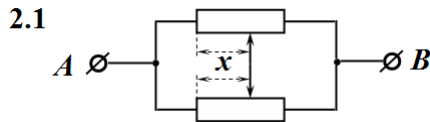
Графики этих функций показаны на рисунке.



Часть 2. Два реостата.

2.1 В этой схеме электрический ток через перемычку не идет, поэтому мы имеем два параллельно соединенных реостата. Общее сопротивление не зависит от положения движков реостата и равно

$$R_{AB} = \frac{R_0}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow p = z. \quad (10)$$



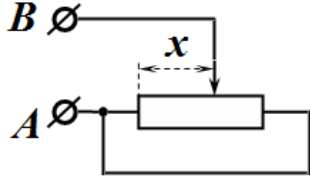
2.2 В этой схеме параллельно соединены участок первого реостата и полностью второй реостат. Сопротивление такой схемы равно

$$R_{AB} = \frac{R_0 R_x}{R_0 + R_x} \Rightarrow r = \frac{z}{1 + z} \Rightarrow p = \frac{1 + z}{z}. \quad (11)$$

Часть 3. Нелинейный реостат.

3.1 Зависимость сопротивления цепи от величины x описывается функцией

$$R_{AB} = \frac{R(x)(R_0 - R(x))}{R_0}. \quad (12)$$



В этом выражении величина R_0 также неизвестна. Однако ее можно найти, анализируя зависимость R_{AB} от $R(x)$. Как следует из выражения (8) эта функция достигает максимума при $R(x) = \frac{R_0}{2}$, при этом

$$(R_{AB})_{\max} = \frac{R(x)(R_0 - R(x))}{R_0} = \frac{\frac{R_0}{2} (R_0 - \frac{R_0}{2})}{R_0} = \frac{R_0}{4}. \quad (13)$$

В таблице 1 находим, что $(R_{AB})_{\max} = 25,0$ Ом. Следовательно,

$$R_0 = 100 \text{ Ом}. \quad (14)$$

3.2 Теперь уравнение (8) можно переписать в безразмерных параметрах

$$r_{AB} = r(z)(1 - r(z)). \quad (15)$$

Данное уравнение является квадратным относительно функции $r(z)$:

$$r^2 - r + r_{AB} = 0. \quad (16)$$

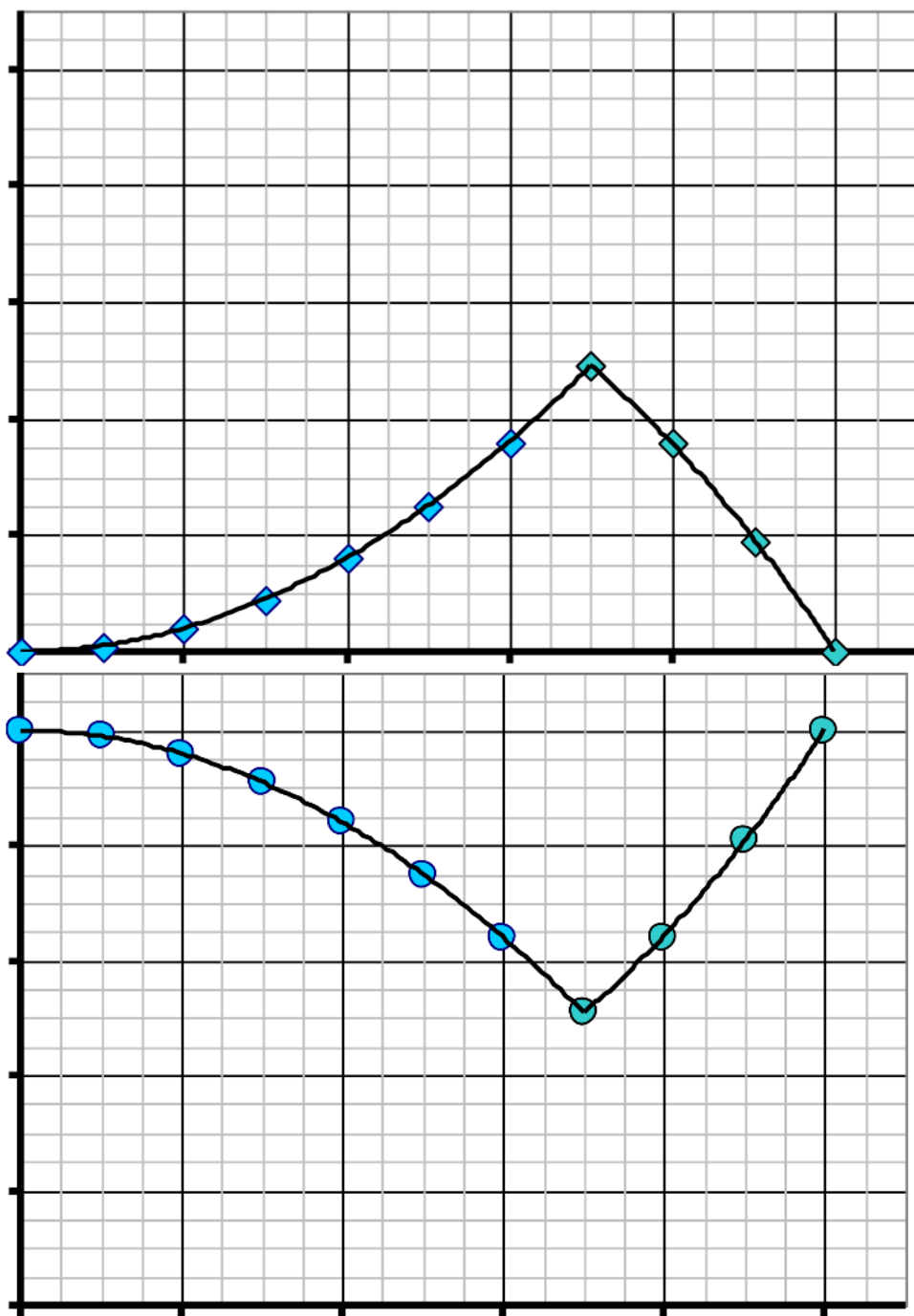
Полное решение этого уравнения задается выражениями:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4r_{AB}}}{2} \\ r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4r_{AB}}}{2} \end{cases}. \quad (17)$$

В Таблице приведены значения корней уравнения (8) в зависимости от параметра z (корни безразмерного уравнения (12) рассчитаны по формулам (13)).

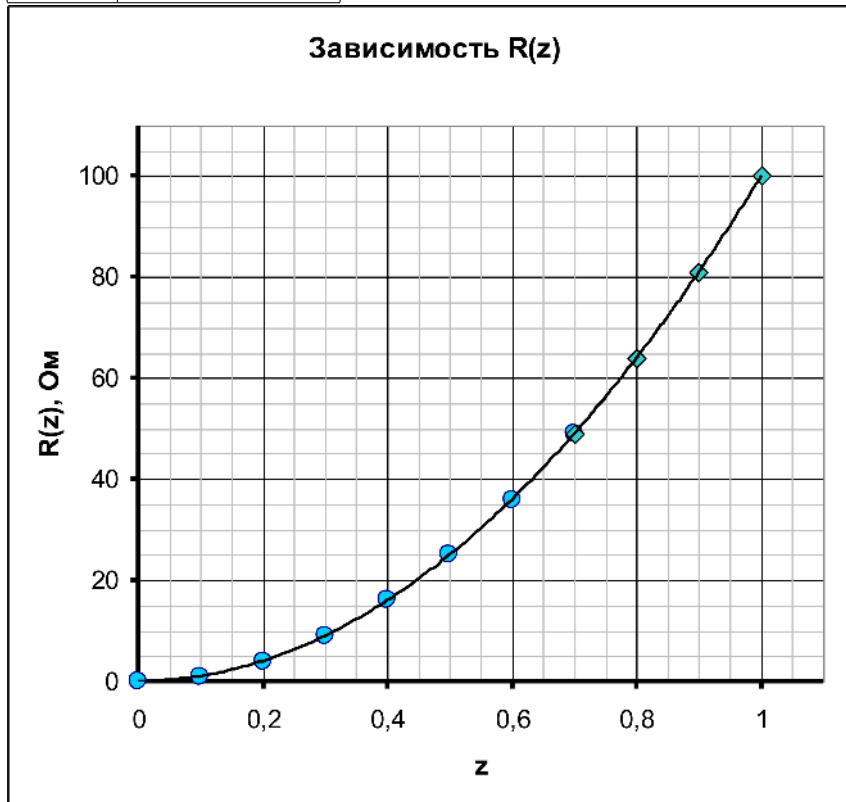
z	$R_{AB}, \text{Ом}$	$r_{AB} = \frac{R_{AB}}{R_0}$	$R_1 = R_0 r_1$	$R_2 = R_0 r_2$
0,0	0,0	0,000	100,00	0,00
0,1	1,0	0,010	99,00	1,00
0,2	3,8	0,038	96,00	4,00
0,3	8,2	0,082	91,00	9,00
0,4	13,4	0,134	84,00	16,00
0,5	18,8	0,188	75,00	25,00
0,6	23,0	0,230	64,00	36,00
0,7	25,0	0,250	51,00	49,00
0,8	23,0	0,230	64,00	36,00
0,9	15,4	0,154	81,00	19,00
1,0	0,0	0,000	100,00	0,00

Ниже показаны графики этих рассчитанных значений.



По своему физическому смыслу полученная функция должна быть монотонно возрастающей, так сопротивление никакого участка реостата не может быть отрицательным. Поэтому, полученные решения надо правильно сшить, как показано в таблице и на графике.

<i>z</i>	$R(z)$, Ом
0,0	0,0
0,1	1,0
0,2	4,0
0,3	9,0
0,4	16,0
0,5	25,0
0,6	36,0
0,7	49,0
0,8	64,0
0,9	81,0
1,0	100,0

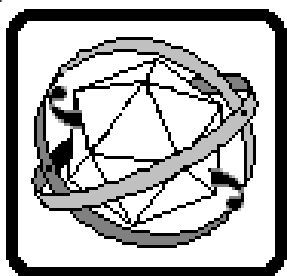
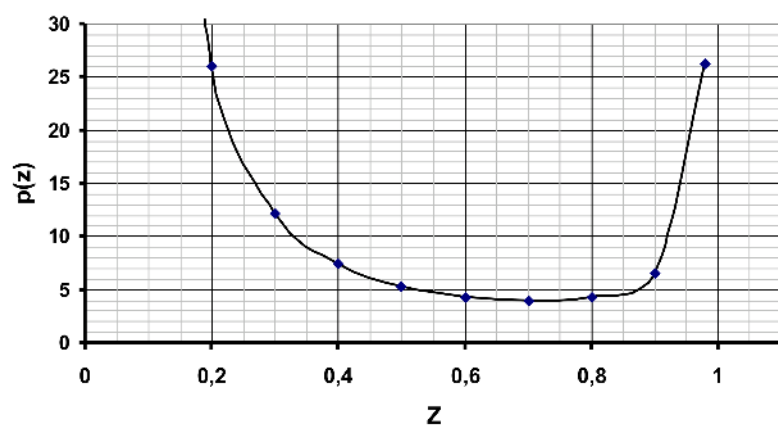


3.3 Легко заметить, что данная функция является квадратичной (значения сопротивлений – квадраты целых чисел) и описывается формулой

$$R(z) = R_0 z^2. \quad (18)$$

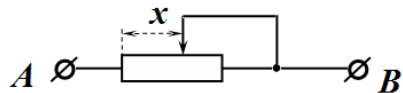
3.4 График зависимости мощности реостата от параметра z имеет вид, показанный на рисунке.

Нелинейный резистор

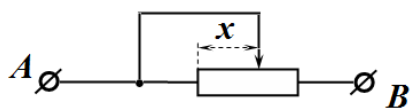


Республиканская физическая олимпиада
2023 года
(Заключительный этап)
Теоретический тур
Решения задач

1.1



1.2



1.3

