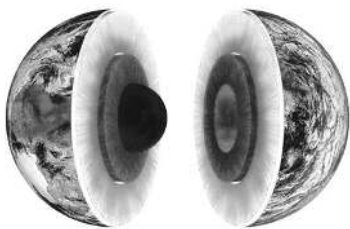
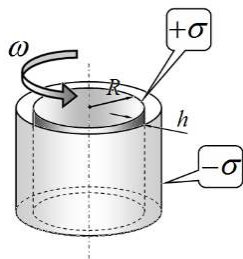


Условие

Задание 2. Магнитное динамо



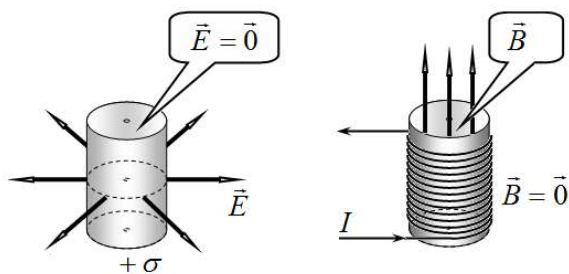
Теория возникновения и существования магнитного поля Земли до настоящего времени окончательно не разработана. В данном задании вам предстоит проанализировать примитивную модель, на первый взгляд, позволяющую описать возникновение магнитного поля, благодаря эффекту магнитного динамо. Не вызывает сомнений, что магнитное поле Земли существует благодаря, во-первых, наличию в ядре Земли хорошо проводящего слоя расплавленного железа, во-вторых, вращению Земли вокруг своей оси. Рассмотрим следующую модель: тонкий цилиндрический слой проводящего вещества вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Обозначим внутренний радиус этого слоя R , а его толщину h , причем $h \ll R$, удельное электрическое сопротивление этого слоя равно ρ , диэлектрическими и магнитными свойствами слоя пренебрегаем $\varepsilon = \mu = 1$. Этот слой находится в непроводящей среде.



Основная идея генерации магнитного поля следующая. Пусть на внутренней поверхности слоя случайно возник электрический заряд, поверхностная плотность которого равна $+\sigma$, тогда на внешней поверхности появится равный по модулю электрический заряд с поверхностной плотностью $-\sigma$. При вращении слоя эти заряды создают магнитное поле, которое воздействует на электроны в проводящем слое, что может приводить к возникновению электрического тока между внутренней и внешней поверхностью рассматриваемого поля, что, в свою очередь, может приводить к увеличению плотности зарядов и как, следствие, к усилению самого магнитного поля.

Подсказки Если на боковой поверхности цилиндра находится равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью σ , то эти заряды создают радиальное электрическое поле у поверхности цилиндра, напряженность которого равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (1)$$



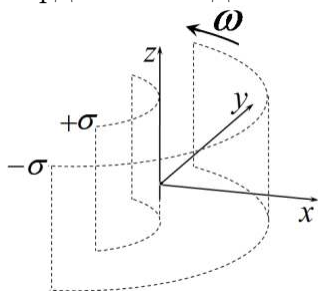
Внутри цилиндра электрическое поле отсутствует. В данном задании можно считать, что модуль напряженности электрического поля в рассматриваемом тонком слое постоянен и определяется формулой (1). Если по обмотке цилиндрического соленоида протекает электрический ток силы I , то этот ток внутри цилиндра создает однородное магнитное поле, направленное вдоль оси цилиндра, модуль которого равен

$$B = \mu_0 n I, \quad (2)$$

где n - плотность намотки (число витков на единицу длины). Вне соленоида магнитное поле отсутствует. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$. Магнитная постоянная $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$.

Часть 1. Поле в слое

Для описания рассматриваемого явления введем декартовую систему координат внутри слоя: Ось x - радиально, перпендикулярно боковым поверхностям слоя; Ось y - по касательной к внутренней поверхности слоя, перпендикулярно его оси; Ось z - параллельно оси слоя; начало координат находится на внутренней поверхности слоя.



1.1 В листе ответов укажите направления векторов: напряженности электрического поля $\vec{E}$, индукции магнитного поля $\vec{B}$, скорости движения $\vec{v}$ в точке, находящейся внутри слоя на оси x . **1.2** Выразите модуль индукции магнитного поля внутри слоя B через поверхностную плотность зарядов σ , угловую скорость вращения ω и радиус слоя R . **1.3** В листе ответов укажите направления сил, действующих на электрон внутри слоя: $\vec{F}_E$ - со стороны электрического поля, $\vec{F}_B$ - со стороны магнитного поля. **1.4** Укажите, чему равны модули сил $\vec{F}_E$ и $\vec{F}_B$.

Часть 2. Заряды и токи *В этой части массой электроном следует пренебречь.*

2.1 Получите уравнение, описывающее изменение поверхностной плотности зарядов с течением времени $\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$, включающее только характеристики проводящего слоя и физические постоянные. **2.2** Определите «критическую» скорость движения слоя $V^* = \omega^* R$, при превышении которой магнитное поле внутри слоя может возрастать с течением времени. Рассчитайте ее численное значение.

Будем считать, что радиус слоя равен $R = 3,5 \cdot 10^6$ м (что равно радиусу ядра Земли), удельное электрическое сопротивление слоя $\rho = 1,4 \cdot 10^{-6}$ Ом·м (сопротивление расплавленного железа).

2.3 Рассчитайте длительность суток на Земле, если скорость движения рассматриваемого слоя достигнет критической величины V^* . **2.4** Пусть поверхностная плотность зарядов на поверхностях слоя в некоторый момент равна σ_0 . Оцените характерное время исчезновения этих зарядов, если угловая скорость вращения слоя равна угловой скорости вращения Земли.

Часть 3. Спасает ли модель масса электрона?

В этой части вам необходимо модифицировать рассматриваемую модель с учетом массы электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг (заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Считайте, что рассматриваемый слой вращается с угловой скоростью равной угловой скорости вращения Земли.

3.1 Покажите, что при учете массы электрона, возможно существования стационарных зарядов на поверхностях слоя. Получите формулу для поверхностной плотности этих зарядов.

3.2 Рассчитайте индукцию магнитного поля внутри слоя в этом случае. Сравните полученное значение со средним значением индукции магнитного поля на поверхности земли $B_0 \approx 40$ мкТл.

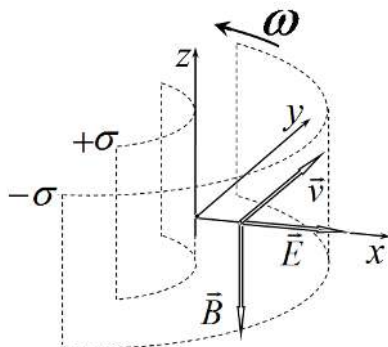
3.3 Сделайте вывод: описывает ли рассмотренная модель механизм возникновения магнитного поля Земли?

Решение

Задание 2. Магнитное динамо (Решение).

Часть 1. Поле в слое

1.1 Направления требуемых векторов указаны на рисунке. Вектор $\vec{E}$ - вдоль оси x ; Вектор $\vec{B}$ - в сторону, противоположную оси z ; Вектор $\vec{v}$ - вдоль оси y .

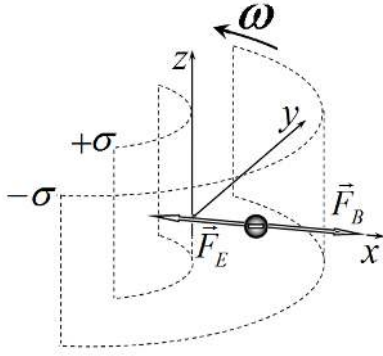


1.2 Формулу для индукции магнитного поля можно получить на основании формулы (2) из условия задачи. Заметим, что величина nI имеет смысл силы тока, приходящейся на единицу длины поверхности цилиндра. При вращении равномерно заряженного цилиндра эта величина может быть представлена в виде

$$nI \Rightarrow \sigma v = \sigma \omega R. \quad (1)$$

Поэтому индукция магнитного поля внутри слоя описывается формулой

$$B = \mu_0 \sigma \omega R. \quad (2)$$



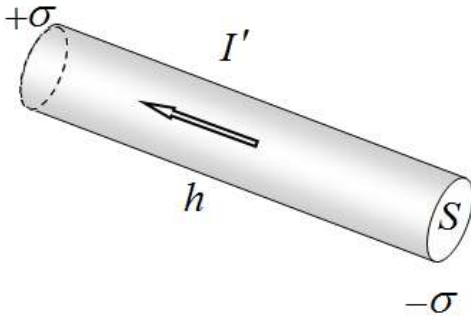
1.3 Направления векторов сил, действующих на электрон, показаны на рисунке.

1.4 Модуль электрической силы равен (по определению вектора напряженности поля)

$$F_E = eE = e \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца. Так как векторы скорости и индукции поля перпендикулярны, то модуль этой силы равен

$$F_B = evB = e(\omega R) \cdot (\mu_0 \sigma \omega R) = e\mu_0 (\omega R)^2 \sigma. \quad (4)$$



Часть 2. Заряды и токи.

2.1 Очевидно, что изменение зарядов на поверхностях слоя происходит благодаря электрическому току, который протекает поперек выделенного слоя. Выделим между боковыми поверхностями проводящего слоя тонкий цилиндр, ось которого перпендикулярна этим поверхностям. Обозначим площадь поперечного сечения этого цилиндра S , его длина равна толщине слоя h . Изменение заряда на торце цилиндра равно силе тока I' , протекающего по цилиндру, т.е.

$$\frac{\Delta(\sigma S)}{\Delta t} = I' \quad (5)$$

Для расчета силы тока можно воспользоваться законом Ома, в котором в качестве напряжения надо взять работу всех сил, действующих на единичный заряд (назовем, эффективное напряжение). В данном случае это «эффективное» напряжение равно

$$U_{\text{эф}} = \frac{(F_M - F_E)h}{e}. \quad (6)$$

Электрическое сопротивление цилиндра рассчитывается по известной формуле

$$r = \rho \frac{h}{S} \quad (7)$$

Используя выражения для сил (3)-(4), получим

$$\frac{\Delta(\sigma S)}{\Delta t} = \frac{U_{\text{эф}}}{r} = \frac{(F_M - F_E)}{e} h \cdot \frac{S}{\rho h} = \frac{\sigma}{\rho \varepsilon_0} (\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1) S. \quad (8)$$

Окончательно, уравнение для изменения плотности зарядов имеет вид:

$$\frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = \frac{\sigma}{\rho \varepsilon_0} (\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1). \quad (9)$$

2.2 Плотность зарядов, следовательно, и индукция поля будут возрастать, если скорость изменения, определяемая уравнением (9), будет положительна, т.е. при

$$\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad V^* = \omega^* R = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (10)$$

Известно, что эта формула определяет скорость света в вакууме, что также можно получить, подставляя численные значения электрической и магнитной постоянных:

$$V^* = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (11)$$

Заметим, что этот же результат можно получить из формул (3)-(4), если понять, что для возрастания магнитного поля магнитная сила должна стать больше силы электрической.

2.3 Из формулы (10) следует, что угловая скорость вращения Земли должна стать равной

$$\omega^* R = c \quad \Rightarrow \quad \omega^* = \frac{c}{R}. \quad (12)$$

Заметим, что при этом скорость точек на поверхности Земли должна превысить скорость света почти в два раза! Период вращения (т.е. сутки) при этом равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega^*} = \frac{2\pi R}{c} \approx 0,073 \text{ с}. \quad (13)$$

2.4 Оценим численное значение скорости движения выделенного слоя

$$V = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 3,5 \cdot 10^6 \text{ м}}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 2,5 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (14)$$

Эта величина значительно меньше скорости света. Отношение силы магнитной к силе электрической, действующей на электрон (первое слагаемое в скобках в уравнении (9)) численно равно $\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 = \left(\frac{V}{c}\right)^2 \approx 7,2 \cdot 10^{-13}$. Поэтому этой величиной можно пренебречь.

Тогда уравнение (9) приобретает совсем простой вид

$$\frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{\rho \varepsilon_0} \quad (15)$$

Характерное время исчезновения зарядов можно получить, если разделить начальную плотность заряда на скорость его убывания в начальный момент времени, т.е.

$$\tau = \frac{\sigma_0}{\left|\frac{\Delta \sigma}{\Delta t}\right|_0} = \frac{\sigma_0}{\left(\frac{\sigma_0}{\rho \varepsilon_0}\right)} = \rho \varepsilon_0 \approx 1,4 \cdot 10^{-6} \cdot 8,8 \cdot 10^{-12} \approx 1,2 \cdot 10^{-17} \text{ с}. \quad (16)$$

Часть 3. Спасает ли модель масса электрона?

3.1 Учет массы электрона приводит к тому, что необходимо принять во внимание его центростремительное ускорение (или центробежную силу в неинерциальной системе отсчета). Как было показано выше, силой Лоренца в данной задаче можно пренебречь, поэтому условие стационарности зарядов может быть сформулировано в виде: электрическая сила обеспечивает электрону необходимое центростремительное ускорение:

$$m_e \omega^2 R = e \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . \quad (17)$$

Отсюда следует, что стационарное значение плотности заряда равно

$$\bar{\sigma} = \frac{m_e}{e} \varepsilon_0 \omega^2 R . \quad (18)$$

3.2 Индукция поля, создаваемого этими зарядами в соответствии с формулой (2), равна

$$B = \mu_0 \bar{\sigma} \omega R = \frac{m_e}{e} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{(\omega R)^3}{R} \approx \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{(2,5 \cdot 10^2)^3}{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot 3,5 \cdot 10^6} \approx 2,8 \cdot 10^{-28} \text{ Тл} , \quad (19)$$

что на 23 порядка меньше магнитного поля Земли.

3.3 Полученные результаты однозначно свидетельствуют, что рассмотренная модель принципиально не может описать возникновение магнитного поля Земли