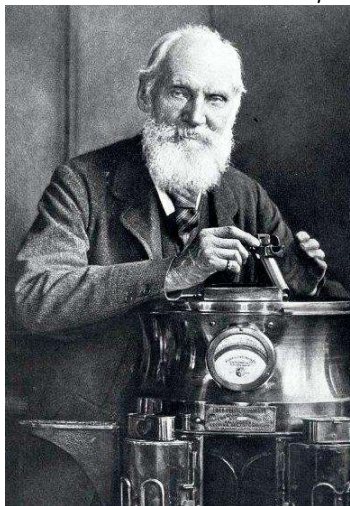


Условие

Задание 1. Как Уильям Томсон стал лордом Кельвином

Задание состоит из 4 логично связанных между собой задач.

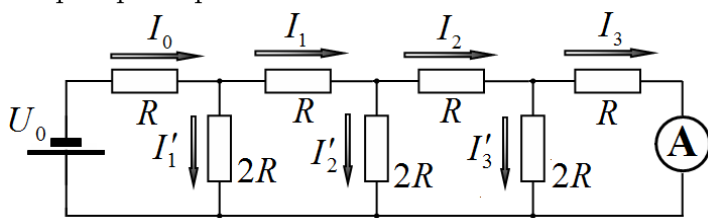


Уильям Томсон (1824 – 1907) – британский физик и инженер, известен своими работами в области механики, термодинамики, электродинамики. За необыкновенные заслуги Томсона в науке 1866 году Томсон был посвящён в рыцарское достоинство. В 1892 году королева Виктория пожаловала Томсону наследственное пэрство. Вследствие этого известный уже как «лорд Кельвин» стал первым британским учёным, получившим право заседать в палате лордов. Одной из самых существенных заслуг Уильяма Томсона являлось разработка теории и усовершенствование трансатлантического кабеля.*

Данное задание касается изучению некоторых теоретических проблем, связанных с распространением электрического тока по длинному проводящему кабелю с неидеальной изоляцией. Может и вам удастся получить дворянский титул?

Задача 1.

На рисунке показана электрическая цепь, состоящая из источника постоянного напряжения U_0 и семи резисторов, сопротивления которых указаны на рисунке. Сопротивление амперметра пренебрежимо мало.



1.1 Рассчитайте значения сил токов через все резисторы, считая силу тока I_3 через амперметр известной.

Используйте обозначения сил токов, приведенные на рисунке.

*Подсказка. Расчет таких цепей удобно начинать с крайних элементов. Чтобы облегчить Ваши расчеты, в Листе ответов приведена Таблица 1. Заполнять эту таблицу следует слева направо и сверху вниз. Пунктиром выделены участки цепи, сопротивления которых обозначены $R_{x3}, R_{x2}, R_{x1}, R_{x0}$ (R_{x0} – конечно, сопротивление всей цепи). Удобно каждое *следующее* из этих сопротивлений выражать через предыдущее.

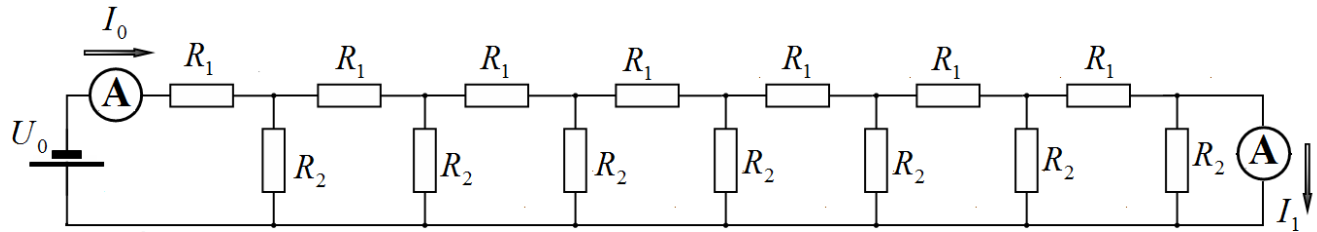
Приведите в Таблице 1 формулы для расчета этих сопротивлений, рассчитайте их значения, выраженные через величину R . Все коэффициенты должны быть записаны в виде обычно-

венных дробей. Запишите в соответствующих ячейках Таблицы 1 расчетные формулы для сил токов и их значения, выраженных через I_3 .

1.2 Выразите значения сил токов I_0 и I_3 через напряжение источника U_0 и сопротивление R .

1.3 Рассчитайте численные отношений сил токов $\frac{I_1}{I_0}$ и $\frac{I_2}{I_1}$.

Задача 2.

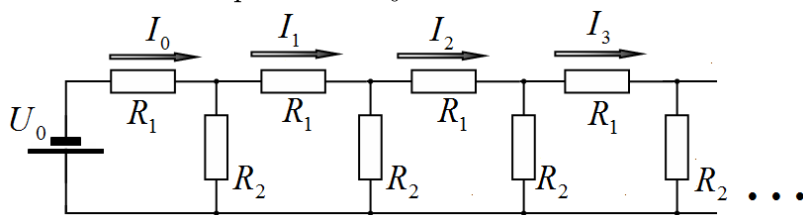


В цепи, показанной на рисунке сопротивления $R_1 = 1,0$ Ом, а сопротивления $R_2 = 1,0$ кОм. Напряжение источника $U_0 = 7,0$ В. Амперметры идеальные.

2.1 Рассчитайте значения сил токов I_0 и I_1 . 2.2 Рассчитайте разность сил токов $\Delta I = (I_0 - I_1)$

Подсказка. Нет необходимости решать эту задачу абсолютно точно. Посмотрите внимательно на заданные значения сопротивлений и проведите расчет с необходимым числом значащих цифр.

Задача 3. Бесконечная цепочка, состоящая из одинаковых звеньев, подключена к источнику постоянного напряжения U_0 .



Пусть в бесконечной цепочке сопротивления резисторов равны $R_1 = R_0$, $R_2 = 2R_0$.

3.1 Найдите полное сопротивление цепи. 3.2 Покажите, что силы токов $I_0, I_1, I_2, \dots$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите отношение сил токов $\frac{I_1}{I_0}$. 3.3 Получите формулу, позволяющую рассчитать значения всех сил токов I_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) через заданные значения U_0 и R_0 .

Подсказка. Если от бесконечности отнять единицу, то получится та же бесконечность.

Пусть в бесконечной цепочке, показанной на рисунке, сопротивления R_2 в несколько тысяч раз больше сопротивлений R_1 , что позволяет делать разумные приближения при расчетах.

3.4 Получите формулу для общего сопротивления всей цепочки, при условии $R_2 \gg R_1$. 3.5 Получите формулу для расчета силы тока в произвольном звене I_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) через заданные значения U_0, R_1, R_2

Задача 4

Телеграфный кабель, который изучал У. Томсон, имел достаточно сложную структуру (см. рисунок): медная жила, резиновая изоляция, бронева защита.



THE DEEP SEA CABLE

Для расчетов существенно: - диаметр медной жилы $d_0 = 20$ мм (удельное сопротивление меди $\rho_1 = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м); - толщина слоя резиновой изоляции $h = 10$ мм (удельное сопротивление

резины считайте равным $\rho_2 = 1,7 \cdot 10^{10}$ Ом·м). - длина кабеля $L = 5000$ км.

Кабель проложен по дну Атлантического океана, поэтому можно считать, что внешний слой изоляции контактирует с хорошо проводящей электрический ток морской водой. Не смотря, на высокое удельное сопротивление изоляции электрический ток частично проходит через изоляционный слой и уходит в океанскую воду.

4.1 Рассчитайте электрическое сопротивление R_1 десяти километров ($\Delta l = 10$ км) медной жилы кабеля. Рассчитайте полное сопротивление медной жилы кабеля. 4.2 Рассчитайте (приближенно, но с хорошей точностью) электрическое сопротивление R_2 десяти километров изоляции кабеля. Рассчитайте полное сопротивление изоляции. Учтите направление тока в изоляции. 4.3 Предложите приближенную эквивалентную электрическую схему подводного телеграфного кабеля, описывающую протекание электрических токов в кабеле. 4.4 Рассчитайте отношение силы тока на выходе из кабеля I_1 к силе тока на его входе I_0 .

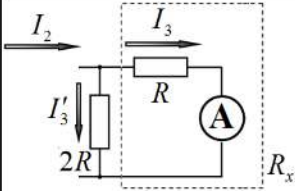
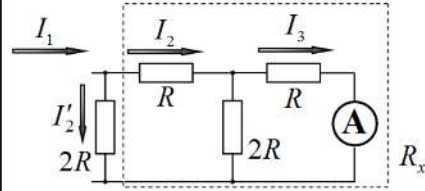
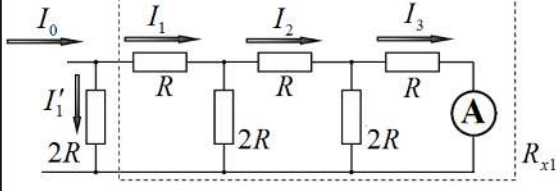
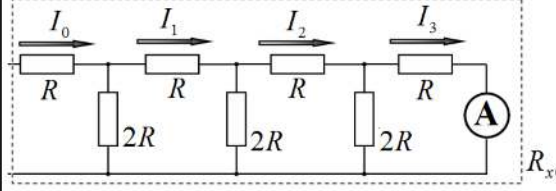
Решение

Задание 1. Как Уильям Томсон стал лордом Кельвином (Решение)

Задача 1.

1.1 Расчет характеристик приведенной цепи традиционен и основан на законах параллельного и последовательного соединения проводников. Результаты расчетов приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

Схема	Сопротивление	Силы токов	
	$R_{x3} = R$	$I'_3 = I_3 \frac{R_{x3}}{2R} = \frac{1}{2} I_3$	$I_2 = I_3 + I'_3 = \frac{3}{2} I_3$
	$R_{x2} = R + \frac{2R \cdot R_{x3}}{2R + R_{x3}} = \frac{5}{3} R$	$I'_2 = I_2 \frac{R_{x2}}{2R} = \frac{5}{4} I_3$	$I_1 = I_2 + I'_2 = \frac{11}{4} I_3$
	$R_{x1} = R + \frac{2R \cdot R_{x2}}{2R + R_{x2}} = \frac{21}{11} R$	$I'_1 = I_1 \frac{R_{x1}}{2R} = \frac{21}{8} I_3$	$I_0 = I_1 + I'_1 = \frac{43}{8} I_3$
	$R_{x0} = R + \frac{2R \cdot R_{x1}}{2R + R_{x1}} = \frac{85}{43} R$		

1.2 Сила тока I_0 определяется по закону Ома (сопротивление всей цепи есть R_{x0}):

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{x0}} = \frac{43 U_0}{85 R}. \quad (1)$$

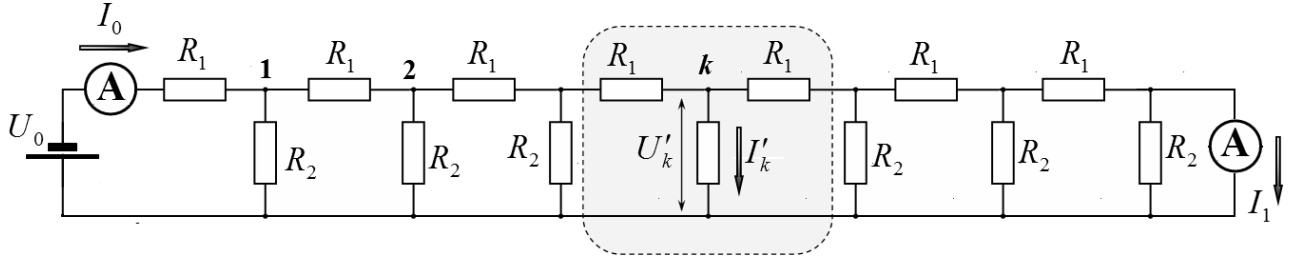
В Таблице получена связь между токами, из которой следует

$$I_0 = \frac{43}{8} I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{8}{43} I_0 = \frac{8}{85} \frac{U_0}{R}. \quad (2)$$

1.3 Требуемые отношения сил токов равны

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{11}{4} \frac{8}{43} = \frac{22}{43} \approx 0,51 \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{2} \frac{4}{11} = \frac{6}{11} \approx 0,55 \quad (3)$$

Задача 2.



2.1 В условии исходные данные заданы с двумя значащими цифрами, поэтому с такой же точностью следует проводить расчет цепи. Сопротивления R_2 в тысячу раз меньше сопротивлений R_1 . Поэтому силы токов через резисторы R_2 более чем в 100 раз меньше, чем силы токов через резисторы R_1 . Следовательно, с приемлемой погрешностью при расчете сил токов I_0 и I_1 токами через резисторы R_2 можно пренебречь. Поэтому эти силы токов равны

$$I_0 \approx I_1 = \frac{U_0}{7R_1} = 1,0 \text{ A.} \quad (4)$$

2.2 Разность сил токов $\Delta I = (I_0 - I_1)$ равна сумме сил токов «утечки» через резисторы R_2 . Выберем произвольный резистор, номер которого обозначим k ($k = 1, 2, \dots, 7$). В рамках использованного приближения, напряжение на этом резисторе равно

$$U'_k = U_0 - I_0 R_1 k = \frac{U_0}{7} (7 - k). \quad (5)$$

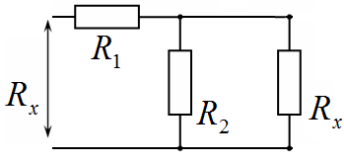
Поэтому сила тока через этот резистор равна

$$I'_k = \frac{U'_k}{R_2} = \frac{U_0}{7R_2} (7 - k). \quad (6)$$

Осталось просуммировать эти силы токов:

$$\Delta I = (I_0 - I_1) = \sum_{k=1}^7 I'_k = \sum_{k=1}^7 \frac{U_0}{7R_2} (7 - k) \quad (7)$$

Элементарный расчет приводит к результату



$$\Delta I = \frac{U_0}{3R_2} = 0,33 \text{ mA} \quad (8)$$

Задача 3.

3.1 Расчет сопротивления бесконечной цепочки достаточно известен. Обозначим это сопротивление R_x . Если от бесконечной цепочки мысленно отключить первое звено, то сопротивление оставшейся цепочки также будет равно R_x . Это позволяет построить эквивалентную схему цепочки. Запишем теперь выражение для сопротивления всей цепочки

$$R_x = R_1 + \frac{R_x R_2}{R_x + R_2}. \quad (9)$$

Это выражение следует рассматривать как квадратное уравнение для нахождения неизвестного сопротивления R_x :

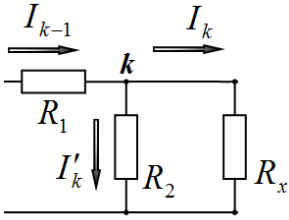
$$R_x^2 - R_x R_1 - R_1 R_2 = 0. \quad (10)$$

Положительный корень этого уравнения определяется по формуле (отрицательное сопротивление физического смысла не имеет):

$$R_x = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{2}. \quad (11)$$

При $R_1 = R_0$, $R_2 = 2R_0$ сопротивление цепочки оказывается равным:

$$R_x = 2R_0. \quad (12)$$



3.2 Рассмотрим произвольное звено бесконечной цепочки, схема которого и направления сил токов показаны на рисунке. Для этих сил токов можно записать два равенства

$$\begin{aligned} I_{k-1} &= I_k + I'_k \\ I_k R_x &= I'_k R_2 \end{aligned} \quad (13)$$

Из этих выражений следует, что

$$I_k = \frac{I_{k-1}}{1 + \frac{R_x}{R_2}} \quad (13)$$

Это рекуррентное соотношение определяет геометрическую прогрессию для последовательности значений сил токов. В явном виде можно записать формулу для геометрической прогрессии

$$I_k = \gamma^k I_0. \quad (14)$$

где

$$\gamma = \left(1 + \frac{R_x}{R_2}\right)^{-1}, \quad I_0 = \frac{U_0}{R_x}. \quad (15)$$

3.3 Подстановка параметров цепи в эти формулы дает $\gamma = \frac{1}{2}$, $I_0 = \frac{U_0}{2R_0}$. Тогда значения всех сил токов описываются формулой

$$I_k = \frac{U_0}{2R_0} \cdot 2^{-k}. \quad (16)$$

Иными словами, после каждого звена сила тока уменьшается в два раза.

3.4 При условии $R_2 \gg R_1$ в формуле (11) надо оставить только самое большое слагаемое, которое определяет сопротивление всей цепи

$$R_x = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2} \approx \sqrt{R_1R_2}. \quad (17)$$

3.5 В этом случае значения сил токов также образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии и сила тока в цепи равны

$$\gamma = \left(1 + \frac{R_x}{R_2}\right)^{-1} = \left(1 + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^{-1} \approx \left(1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right) \quad (18)$$

$$I_k = \frac{U_0}{\sqrt{R_1R_2}}$$

Тогда явный вид формулы для значений сил токов записывается в виде:

$$I_k = \frac{U_0}{\sqrt{R_1R_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^k. \quad (19)$$

Задача 4

4.1 Сопротивление медной жилы длиной Δl рассчитывается по формуле

$$R_1 = \rho_1 \frac{4\Delta l}{\pi d_0^2}. \quad (20)$$

Подставив численные значения, получим (все величины в системе СИ):

$$R_1 = 1,7 \cdot 10^{-8} \frac{4 \cdot 10^4}{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2} = 0,54 \text{ Ом}. \quad (21)$$

Сопротивление всего кабеля

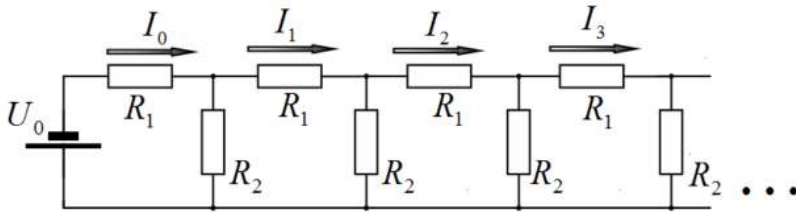
$$R_{1\Sigma} = R_1 \frac{L}{\Delta l} = 0,54 \frac{5000}{10} = 270 \text{ Ом}. \quad (22)$$

4.2 Ток через изоляцию протекает перпендикулярно оси кабеля, поэтому ее сопротивление равно

$$R_2 = \rho_2 \frac{h}{\pi \left(d + \frac{h}{2}\right) \Delta l} = 1,7 \cdot 10^{10} \frac{5,0 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Ом}. \quad (23)$$

Толщина изоляции сравнима с диаметром жилы, поэтому площадь поперечного сечения увеличивается по мере удаления от жилы. Поэтому в качестве разумного приближения взято сечение на половине слоя изоляции.

4.3 Несмотря на то, что кабель представляет непрерывную систему, можно разбить ее на отдельные куски некоторой длины



Δl (например 10 км). В этом случае эквивалентной схемой является бесконечная цепочка, рассмотренная в задаче 3.

4.4 Для расчета отношения сил токов на выходе и входе следует воспользоваться формулой (19)

$$I_1 = I_0 \left(1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right)^N. \quad (24)$$

Здесь $N = \frac{L}{\Delta l}$. Выразим отношение сопротивлений, входящих в эту формулу

$$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{4\Delta l}{\pi d_0^2} \cdot \frac{\pi \left(d_0 + \frac{h}{2}\right) \Delta l}{h}} = \alpha \Delta l. \quad (25)$$

Введенная здесь постоянная величина, равна

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{4 \left(d_0 + \frac{h}{2}\right)}{d_0^2 h}} = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1}. \quad (26)$$

Теперь можно переписать формулу (24) в виде

$$\frac{I_1}{I_0} = \left(1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right)^N = (1 - \alpha \Delta l)^{\frac{L}{\Delta l}}. \quad (27)$$

Можно убедиться в том, что при $\alpha \Delta l \ll 1$ результаты расчетов практически не зависят от искусственно выбранного значения Δl .

Так при $\Delta l = 10 \text{ км}$ получаем

$$\frac{I_1}{I_0} = (1 - \alpha \Delta l)^{\frac{L}{\Delta l}} = (1 - 5,0 \cdot 10^{-7} \cdot 10^4)^{500} = 0,082 \quad (28)$$

т.е. сила тока уменьшилась примерно в 20 раз. Понятно, что не утечка тока являлась основной причиной неработоспособности трансатлантического кабеля!

*Дополнение (от участников олимпиады не требуется). Строго говоря, в формуле (27) необходимо устремить $\Delta l \rightarrow 0$. В этом случае**

$$\frac{I_1}{I_0} = (1 - \alpha \Delta l)^{\frac{L}{\Delta l}} = \exp(-\alpha L) = 0,082,$$

что совпадает с ранее полученным результатом.

*Также можно указать смысл постоянной α : обратная ей величина $\frac{1}{\alpha} \approx 2000 \text{ км}$ есть расстояние на котором сила тока в кабеле убывает в $e \approx 2,7$ раз.**