

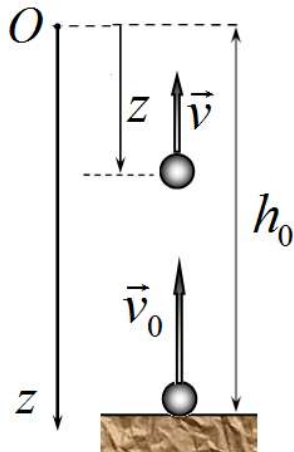
Условие

Задание 2. Вытекание

Часть 1. Бросок

В данной части вам необходимо описать движение тела, брошенного вертикально вверх, в не совсем обычной системе координат. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Небольшой шарик брошен вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Обозначим максимальную высоту подъема шарика h_0 . Введем ось координат z , направленную вертикально вниз, начало отсчета которой совпадает с максимальной высотой подъема. Далее под скоростью v_z и ускорением a_z подразумеваются проекции скорости и ускорения шарика на ось z .



1.1 Выразите максимальную высоту подъема шарика h_0 через начальную скорость v_0 и ускорение свободного падения g .

1.2 Чему равны проекции ускорения и начальной скорости шарика на ось z - a_z , v_{0z} ?

1.3 Найдите зависимость скорости шарика v_z от координаты z - $v_z(z)$.

1.4 Найдите зависимость координаты шарика z от времени $z(t)$. В качестве параметров этой функции используйте только начальную скорость v_0 и ускорение свободного падения g .

1.5 Постройте схематический график зависимости $z(t)$. Укажите характерные точки этого графика.

Обозначим $\tau_{0,5}$ («время полуподъема») - время, за которое шарик поднимается на высоту $\frac{h_0}{2}$, равную половине максимальной высоты. Это время $\tau_{0,5}$ может быть выражено через максимальную высоту подъема h_0 и ускорение свободного падения следующим образом:

$$\tau_{0,5} = Ch_0^\alpha g^\beta, \quad (1)$$

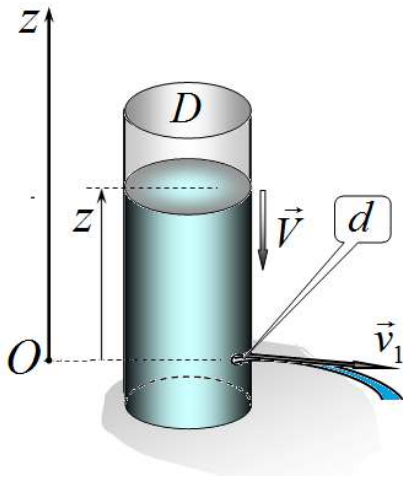
где C - некоторый безразмерный численный коэффициент, α, β - постоянные показатели степеней.

1.6 Найдите значения показателей степеней α, β в формуле (1).

1.7 Рассчитайте численное значение коэффициента C в формуле (1).

Часть 2. Дырявый сосуд

В данной части задачи вам необходимо описать процесс вытекания жидкости из сосуда, в стенке которого имеется небольшое отверстие.



В боковой стенке вертикального цилиндрического сосуда с диаметром поперечного сечения D проделали малое круглое отверстие диаметра d вблизи дна сосуда. Обозначим отношение этих диаметров $\eta = \frac{d}{D} \ll 1$

В сосуд наливают воду. Уровень воды z в сосуде отсчитывается от середины отверстия. Ось z направлена вертикально вверх. Считайте, что диаметр отверстия значительно меньше высоты уровня воды в сосуде $d \ll z$. Обозначим скорость вытекания воды из отверстия $\vec{v}_1$, скорость опускания уровня воды в сосуде $\vec{V}$. Вязкостью воды следует пренебречь, в этом приближении сохраняется механическая энергия воды, т.е. тепловых потерь нет.

2.1 Найдите зависимость скорости вытекания воды из отверстия v_1 от высоты уровня воды в сосуде $v_1(z)$.

2.2 Найдите зависимость проекции на ось z скорости опускания V_z от высоты уровня z . В качестве параметров этой функции используйте только ускорение свободного падения g и отношение диаметров η .

2.3 Чему равно ускорение, с которым опускается уровень воды в сосуде a_z ?

2.4 Найдите зависимость высоты уровня воды в сосуде от времени $z(t)$. При $t = 0$ высота уровня воды в сосуде равна h_0 . В качестве параметров функции используйте величины g, h_0, η .

2.5 Найдите через, какое время $\tau_{0,5}$ уровень воды в сосуде уменьшится в два раза.

2.6 Рассчитайте численное значение времени «полувывтекания» $\tau_{0,5}$, если $h_0 = 20$ см, $\eta = \frac{1}{20}$, $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

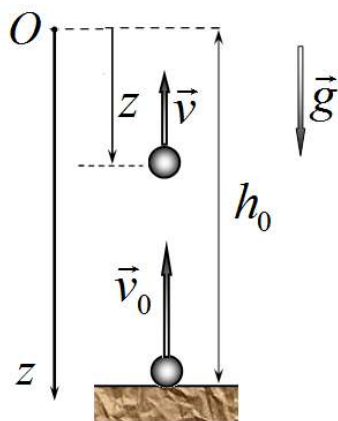
Решение

Задание 2. Вытекание (решение).

Часть 1. Бросок

Шарик движется равноускоренно с ускорением свободного падения $\vec{g}$, направленным вертикально вниз. Если высота подъема шарика равна h , то введенная координата шарика равна

$$z = h_0 - h. \quad (1)$$



1.1 Максимальную высоту подъема проще всего выразить из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh_0 \quad (2)$$

Из этой формулы получаем:

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (3)$$

1.2 Проекция ускорения и начальной скорости на введенную ось z равны

$$\begin{aligned} a_z &= +g \\ v_{0z} &= -v_0 \end{aligned} \quad (4)$$

1.3 Зависимость скорости шарика от его координаты легко выразить из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + mgh. \quad (5)$$

Из которого следует (с учетом знака проекции), что

$$v_z(z) = -\sqrt{2g(h_0 - h)} = -\sqrt{2gz}. \quad (6)$$

1.4 Из формулы (5) выразим

$$mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + mgh \Rightarrow h = h_0 - \frac{v^2}{2g} \quad (7)$$

Так как движение шарика является равноускоренным, то зависимость скорости от времени описывается функцией

$$v = v_0 - gt. \quad (8)$$

Поэтому зависимость координаты $z(t)$ имеет вид

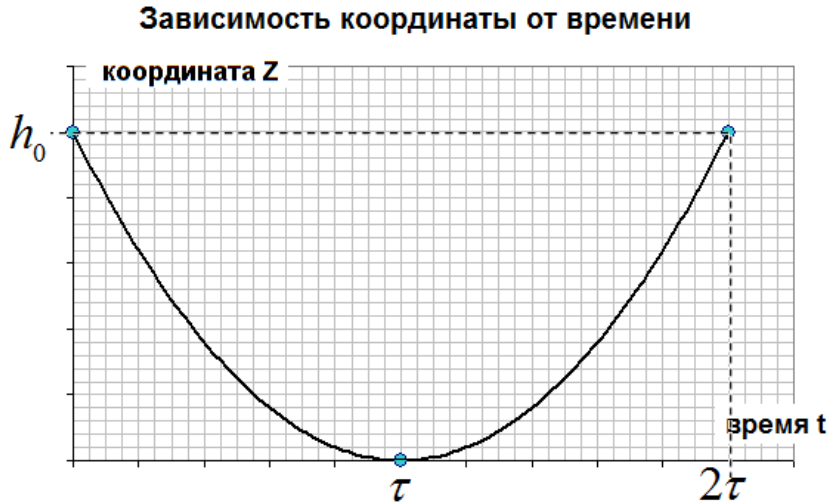
$$z(t) = h_0 - h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(v_0 - gt)^2}{2g}. \quad (9)$$

Примечание. Все формулы этой части могут быть получены чисто «кинематически», используя законы равноускоренного движения. При таком подходе проще всего использовать известную формулу

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

1.5 График функции (9) показан на рисунке

Кривая является параболой. На графике обозначено $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$ - начальная и конечная координата шарика; $\tau = \frac{v_0}{g}$ - время подъема шарика.



1.6 Значения показателей степеней могут легко быть найдены, используя метод размерностей

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}. \quad (10)$$

То есть формула для искомого времени имеет вид

$$\tau_{0,5} = C \sqrt{\frac{h_0}{g}}. \quad (11)$$

1.7 Для расчета значения коэффициента C подставим выражение (11) для времени и формулу $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ для начальной скорости в уравнение (9):

$$z = \frac{(v_0 - gt)^2}{2g} \Rightarrow 2g \frac{h_0}{2} = \left(\sqrt{2gh_0} - gC \sqrt{\frac{h_0}{g}} \right)^2 \Rightarrow 1 = (\sqrt{2} - C)^2 \quad (12)$$

Из этого уравнения находим два возможных значения коэффициента C :

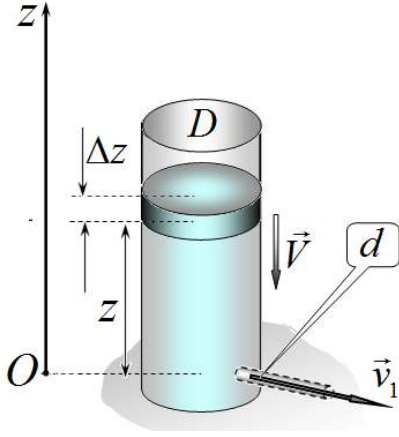
$$C_{1,2} = \sqrt{2} \pm 1 \quad (13)$$

Два корня имеют физический смысл: шарик находится на половине высоты дважды — при подъеме и при спуске. По смыслу задачи необходимо выбрать меньший корень, поэтому

$$C = \sqrt{2} - 1 \quad (14)$$

Примечание. Результаты могут быть получены и с помощью непосредственного решения уравнения (9) без перехода к безразмерным параметрам.

Часть 2. Дырявый сосуд



2.1 Рассмотрим процесс вытекания за малый промежуток времени Δt . Пусть за это время уровень воды в сосуде изменился от z до $z - \Delta z$. Поэтому потенциальная энергия воды в сосуде уменьшилась на величину

$$\Delta U = \Delta mgz \quad (15)$$

где Δm - масса воды, вытекшей из сосуда за рассматриваемый промежуток времени. Такая же масса воды протекла через отверстие, унося кинетическую энергию

$$\Delta E_k = \frac{\Delta m v_1^2}{2}. \quad (16)$$

Так как площадь поперечного сечения сосуда значительно больше диаметра отверстия, то кинетической энергией воды, находящейся в сосуде, можно пренебречь. На основании закона сохранения механической энергии можно записать

$$\frac{\Delta m v_1^2}{2} = \Delta mgz. \quad (17)$$

Откуда следует, что скорость вытекания воды из отверстия равна

$$v_1 = \sqrt{2gz}. \quad (18)$$

2.2 Изменение объема воды в сосуде равно объему вытекшей воды, поэтому

$$SV\Delta t = s_1 v_1 \Delta t, \quad (19)$$

где S , s_1 площади поперечного сечения сосуда и отверстия, соответственно. Из формулы (19) следует, что

$$V = \frac{s_1}{S} v_1. \quad (20)$$

Учитывая, что отношение площадей равно квадрату отношения диаметров, используя формулу (18) получим зависимость скорости опускания от высоты

$$V(z) = \left(\frac{d}{D}\right)^2 v_1 = \eta^2 \sqrt{2gz}. \quad (21)$$

С учетом направления оси z , запишем искомую зависимость проекции этой скорости от высоты

$$V_z(z) = -\sqrt{2(\eta^4 g)z}. \quad (21)$$

2.3 Функция (21) полностью аналогична зависимости (6), полученной для равноускоренного движения шарика в поле тяжести земли, если заменить величину g на модифицированное значение $\eta^4 g$. Кроме того, для этих зависимостей одинаковы начальные условия (при $t = 0$ $z = h_0$), поэтому законы движения также полностью аналогичны! Следовательно, далее можно использовать все формулы, полученные для движения шарика (не забывая в них изменить значение ускорения). Так ускорение уровня воды равно

$$a_z = +\eta^4 g. \quad (22)$$

2.4 С помощью найденной аналогии на основании формулы (9) запишем закон движение границы

$$z(t) = \frac{(V_0 - \eta^4 g t)^2}{2\eta^4 g}. \quad (23)$$

Начальная скорость движения определяется формулой (21), поэтому закон движения уровня воды имеет вид

$$z(t) = \frac{\left(\sqrt{2\eta^4 g h_0} - \eta^4 g t\right)^2}{2\eta^4 g}. \quad (23)$$

2.5 Время «полувывтекания» найдем с помощью формулы (11) и найденным значением коэффициента (14)

$$\tau_{0,5} = \left(\sqrt{2} - 1\right) \sqrt{\frac{h_0}{\eta^4 g}}. \quad (24)$$

2.6 подстановка численных значений приводит к результату

$$\tau_{0,5} = \left(\sqrt{2} - 1\right) \sqrt{\frac{h_0}{\eta^4 g}} = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot 20^2 \sqrt{\frac{0,20}{10}} \approx 23\text{с}. \quad (25)$$