

Условие

Задание 2. Столкновение ядер

Для изучения ядерных взаимодействий широко используется экспериментальный метод столкновения ядер различных химических элементов.

Для ускорения ядер, которые значительно тяжелее протонов, используются линейные ускорители. Во всех частях задачи считайте, что скорости частиц значительно меньше скорости света.



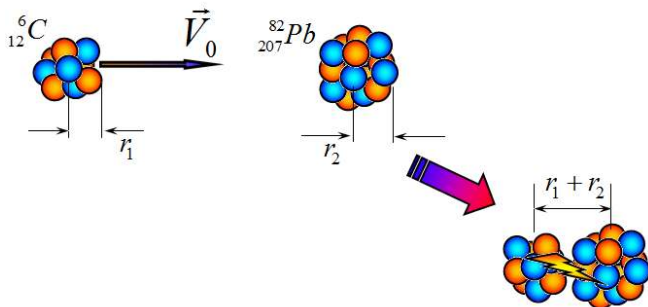
В данной задаче рассматривается столкновение ускоренных ядер углерода ${}^6_{12}\text{C}$ и неподвижных ядер свинца ${}^{82}_{207}\text{Pb}$.

Числа в обозначениях ядер означают: верхнее число Z - зарядовое число (число протонов в ядре), нижнее число A - массовое число (общее число протонов и нейтронов в ядре). Эти числа позволяют найти

- заряд ядра $q = Ze$, где $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл - заряд электрона;
 - массу ядра, которая приблизительно равна $m = Am_p$, где $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг;
 - радиус ядра $r = aA^{1/3}$, где $a = 1,3 \cdot 10^{-15}$ м.
- Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{М}}$.

Часть 1. Порог реакции

Ядро углерода ${}^6_{12}\text{C}$ ускоряется в ускорителе, проходя ускоряющую разность потенциалов U , и приобретает скорость V_0 . Ядро-мишень ядро свинца можно считать неподвижным и свободным. Чтобы между ядрами началась ядерная реакция, необходимо, чтобы центры ядер сблизились на расстояние меньшее, чем сумма их радиусов.

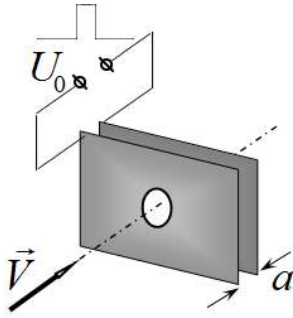


1.1 Рассчитайте, какую минимальную ускоряющую разность потенциалов U_0 должно пройти ядро углерода, чтобы началась ядерная реакция его взаимодействия с ядром свинца.

1.2 Рассчитайте, чему будет равна скорость ядра углерода V_0 при прохождении разности потенциалов U_0 .

1.3 Рассчитайте минимальную ускоряющую разность потенциалов и скорость ядра, если ускоряется ядро свинца, а мишенью является ядро углерода.

Часть 2. Ускоряющая система

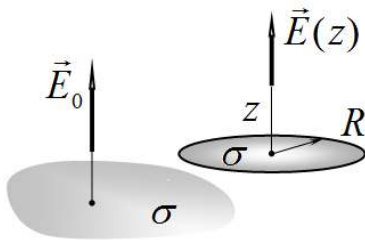


Для ускорения ядер используется несколько ячеек разгона. Каждая такая ячейка состоит из двух больших параллельных металлических пластин, расположенных перпендикулярно направлению движения частиц. В пластинах вырезаны два коаксиальных круглых отверстия радиуса R . Ускоряемые частицы движутся вдоль оси этих отверстий. Расстояние между пластинами равно a и в несколько раз меньше радиусов отверстий. На пластины подается импульсное напряжение U_0 , которое включается при подлете частиц к первой пластине и выключается при вылете частиц за вторую пластину.

2.1 Рассчитайте, какую кинетическую энергию ΔW приобретет ядро углерода при пролете через ускоряющую ячейку.

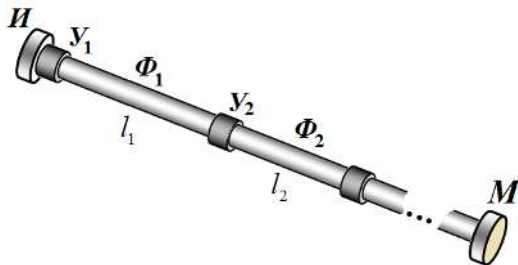
Подсказка. Равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда σ плоская пластина создает однородное электрическое поле, напряженность которого обозначим $\vec{E}_0$. Равномерно заряженный диск радиуса R создает такое электрическое поле, что на оси диска на расстояниях $z \ll R$ его напряженность описывается приближенной формулой

$$E(z) = E_0 \left(1 - \frac{z}{R}\right). \quad (1)$$



2.2 Используя определение электрической емкости и формулу для емкости плоского конденсатора, выразите напряженность поля E_0 , создаваемого равномерно заряженной плоскостью, через поверхностную плотность заряда σ .

Часть 3. Линейный ускоритель



Линейный ускоритель состоит из:

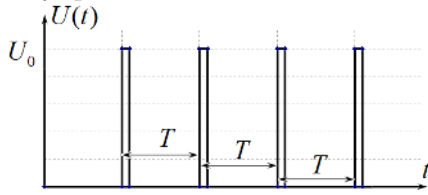
И – источник ускоряемых ядер;

Y₁, Y₂ ... - ускоряющие ячейки, их общее число равно N ;

$\Phi_1, \Phi_2 \dots$ - трубы с фокусирующими магнитными устройствами (в данной задаче не рассматриваются), их длины обозначены $l_1, l_2 \dots$;

$\mathbf{M}$ – мишень с неподвижными ядрами.

Внутри системы находится вакуум.



Будем считать, что на входе в первую ускоряющую ячейку $\mathbf{Y}_1$ скорости ядер равны нулю. На все ускоряющие ячейки одновременно подается импульсное напряжение, одинаковое на всех ускоряющих ячейках. Частота следования импульсов напряжения постоянна. Причем она настраивается так, что разгоняемые ядра ускоряются в каждой ячейке. Схематический вид зависимости напряжения, подаваемого на все ускоряющие ячейки, от времени показан на рисунке. Временем пролета частиц через ускоряющие ячейки пренебрежимо мало. Длина первой трубы равна l_1 .

3.1 Рассчитайте длины остальных труб l_n , при которых ядра будут ускоряться в каждой ускоряющей ячейке.

Решение

Задание 2. Столкновение ядер (Решение)

Часть 1. Порог реакции

1.1 Основная проблема рассмотренного типа ускорения заключается в том, что ядро-мишень также приходит в движение. Поэтому не вся кинетическая энергия движущегося ядра переходит в энергию их взаимодействия. При сближении положительно заряженных ядер возрастает энергия их кулоновского взаимодействия, которое препятствует их столкновению. Не сложно понять, что при минимальном сближении ядер их скорости становятся равными. Запишем закон сохранения энергии для рассматриваемых ядер

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) V^2}{2} + W(r). \quad (1)$$

Здесь: V_0 - скорость ускоренного ядра; V скорости ядер в момент максимального сближения; $W(r)$ - потенциальная энергия кулоновского взаимодействия в этот же момент времени.

Так как ядра должны сблизиться на расстояние $(r_1 + r_2)$, потенциальная энергия взаимодействия должна достичь величины

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0(r_1 + r_2)}, \quad (2)$$

где q_1, q_2 - электрические заряды ядер. Скорость ядер в момент максимального сближения можно выразить их закона сохранения импульса

$$m_1 V_0 = (m_1 + m_2) V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_0 \quad (3)$$

Подставим в уравнение (1) и преобразуем его:

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} V_0 \right)^2 + W(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1 V_0^2}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = W(r). \quad (4)$$

Кинетическую энергию налетающего ядра выразим через ускоряющую разность потенциалов U :

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = q_1 U. \quad (5)$$

Эти уравнения позволяют записать выражение

$$q_1 U \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0(r_1 + r_2)}, \quad (6)$$

Из которого находим

$$U = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0(r_1 + r_2)}. \quad (7)$$

Наконец выразим характеристики ядер через их массовые и зарядовые числа

$$U = \frac{A_1 + A_2}{(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \frac{Z_2}{A_2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8)$$

Подставляя численные значения всех величин, получим

$$U = \frac{A_1 + A_2}{(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \frac{Z_2}{A_2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{12 + 207}{(12^{1/3} + 207^{1/3})} \frac{82}{207} \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,3 \cdot 10^{-15}} =$$

$$= 1,2 \cdot 10^7 \text{ В}$$

1.2 Для вычисления скорости налетающего ядра воспользуемся формулами (5) и (8):

$$\frac{A_1 m_p V_0^2}{2} = Z_1 e U = Z_1 e \frac{A_1 + A_2}{(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \frac{Z_2}{A_2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{A_1 + A_2}{(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \frac{Z_2 Z_1}{A_2 A_1} \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a m_p}} \quad (10)$$

Численное значение этой величины равно

$$V_0 = \sqrt{\frac{A_1 + A_2}{(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \frac{Z_2 Z_1}{A_2 A_1} \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a m_p}} = 3,35 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (11)$$

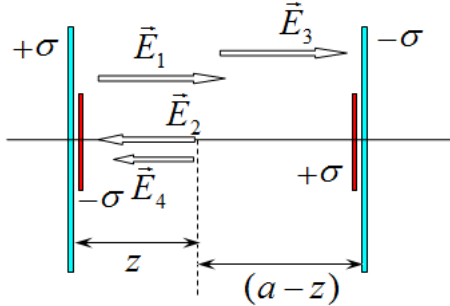
1.3 Если ядра пометить местами, то это приведет к изменению индексов в конечных формулах. Тогда ускоряющая разность потенциалов для атома свинца оказывается равной

$$U = \frac{A_1 + A_2}{(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \frac{Z_1}{A_1} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ В} \quad (12)$$

Формула для скорости симметрична по индексам, поэтому скорость ядра свинца должна остаться прежней

$$V_0 = \sqrt{\frac{A_1 + A_2}{(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \frac{Z_2 Z_1}{A_2 A_1} \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a m_p}} = 3,35 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (13)$$

Часть 2. Ускоряющая система



2.1 Для расчета энергии, которую получает ядро при пролете через ускоряющую ячейку, необходимо рассмотреть электрическое поле между пластинами. Для расчета поля используем принцип суперпозиции и достаточно традиционную идею: вместо отверстия будем рассматривать сплошную пластину с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, на которую наложен диск, радиус которого равен радиусу отверстия, с противоположной плотностью заряда $-\sigma$. Аналогично будем рассматривать и вторую пластину с отверстием. При таком подходе напряженность электрического поля на оси отверстий можно представить в виде следующей суммы полей (в проекции на направление движения частиц): - поле положительно заряженной пластины $E_1 = E_0$; - «поле отверстия» в этой пластине $E_2 = -E_0 \left(1 - \frac{z}{R}\right)$; - поле отрицательно заряженной пластины $E_3 = E_0$; - «поле отверстия» во второй пластине $E_4 = -E_0 \left(1 - \frac{a-z}{R}\right)$. Сумма этих полей оказывается равной

$$E_{\Sigma} = E_0 \frac{a}{R}. \quad (14)$$

Таким образом, в рамках приближенной модели поля диска, поле на оси отверстий оказывается однородным. Следовательно, разность потенциалов между центрами отверстий равна

$$\Delta\varphi_{CC} = E_{\Sigma} a = E_0 \frac{a^2}{R}. \quad (15)$$

При прохождении этой разности потенциалов энергия ядра увеличится на величину

$$\Delta W = q \Delta\varphi_{CC} = q E_0 \frac{a^2}{R}. \quad (16)$$

На большом удалении от отверстий поле между пластинами однородное, его напряженность равна E_0 . Следовательно, разность потенциалов (или напряжение) между пластинами равна

$$U_0 = a E_0. \quad (17)$$

Наконец, из последних формул следует, что при пролете через ускоряющую систему ядро приобретет энергию равную

$$\Delta W = q U_0 \frac{a}{R}. \quad (18)$$

2.2 Формула для емкости плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (19)$$

И определение емкости

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{2E_0 d}, \quad (20)$$

(здесь E_0 - напряженность поля, создаваемого одной пластиной) позволяют выразить напряженность поля одной пластины через поверхностную плотность заряда на ней

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (21)$$

Часть 3. Линейный ускоритель

3.1 Чтобы разгон ядра проходил в каждой ускоряющей ячейке, необходимо, чтобы ядро подлетало к очередной ячейке в момент включения поля. То есть времена пролета между ячейками должны быть одинаковыми. Так как в каждой ячейке кинетическая энергия увеличивается на одну и ту же величину ΔW , то после пролета n ячеек энергия и скорость ядра будут равны

$$W = n\Delta W \begin{cases} W_n = n\Delta W \\ \frac{mV_n^2}{2} = W_n \end{cases} \Rightarrow V_n = V_1\sqrt{n}. \quad (22)$$

Из условия постоянства времен пролета

$$\frac{l_1}{V_1} = \frac{l_n}{V_n} = \frac{l_n}{V_1\sqrt{n}}. \quad (23)$$

следует, что длины труб должны удовлетворять условию

$$l_n = l_1\sqrt{n} \quad (24)$$