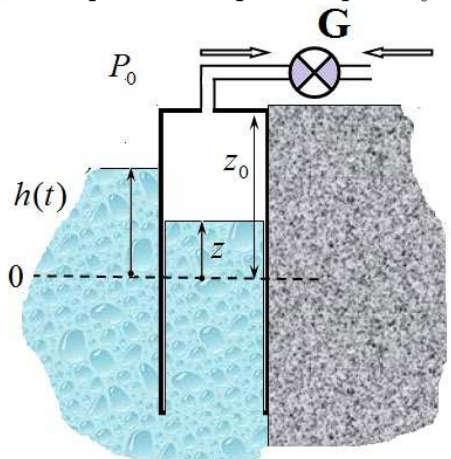


Условие

Задание 3. ВЭС – волновая электростанция.



Одним из нетрадиционных возобновляемых источников энергии может служить энергия морских волн. К настоящему времени разработано более десятка различных волновых электростанций (ВЭС), некоторые из которых показаны на рисунке. В данном задании Вам необходимо проанализировать работу одного из типов, таких реально существующих ВЭС.



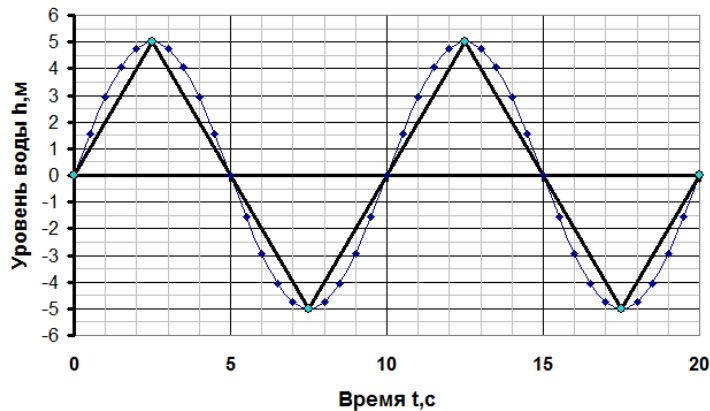
Упрощенная схема установки показана на рисунке. Прочный открытый снизу цилиндр вертикально закреплен у береговой скалы. Морская вода может поступать в этот рабочий цилиндр снизу. В верхней части трубы находится воздух. Выходная труба соединяет цилиндр с электрогенератором G , выходная труба генератора открыта в атмосферу. При подъеме уровня воды воздух вытесняется из цилиндра и приводит во вращение турбину генератора. При опускании уровня воды через ту же трубу атмосферный воздух всасывается внутрь рабочего цилиндра через ту же трубу. При этом турбина также может вращаться, что приводит к выработке электроэнергии.

Для описания работы этой установки используются следующие приближения.

- 1) Воздух можно считать идеальным газом.
- 2) Вода внутри и снаружи рабочего цилиндра все время находится в квазиравновесном состоянии, т.е. давление, создаваемое водой, может рассчитываться по законам гидростатики.
- 3) Генератор снабжен клапаном, который открывается, если разность давлений с разных сторон генератора достигает некоторого значения δP . При меньшей разности давлений труба оказывается полностью перекрытой. При открытом клапане (из-за наличия турбины) разность давлений остается постоянной и равной δP .
- 4) Все процессы происходят при постоянной температуре.
- 5) Разностью давлений воздуха в рабочем цилиндре и выходной трубе можно пренебречь.
- 6) Уровень воды вблизи рабоче-

го цилиндра изменяется по периодическому закону, который можно приближенно описать кусочно-линейной функцией. На графике: плавная кривая – реальная зависимость, ломаная линия – приближение, которое используется в решении данной задачи.

Зависимость уровня воды от времени



В данной задаче удобно в качестве единицы давления использовать «метр водяного столба» - гидростатическое давление, создаваемое 1 метром водяного столба. Считайте, что $1\text{ м.в.с.} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

Используйте следующие обозначения (смотри схему установки): - высота уровня воды вблизи рабочего цилиндра $h(t)$ - график этой функции приведен выше; - высота уровня воды внутри рабочего цилиндра $z(t)$; - высота верхней крышки рабочего цилиндра z_0 .

Все эти величины отсчитываются от равновесного уровня моря.

В расчетах используйте следующие значения параметров: - атмосферное давление $P_0 = 10\text{ м}$ (водяного столба, что соответствует нормальному атмосферному давлению); - температура воздуха и воды $t^\circ = 7,0^\circ\text{C}$; - молярная масса воздуха $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$; - универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$; - площадь поперечного сечения рабочего цилиндра $S_0 = 10\text{ м}^2$; - площадь поперечного сечения выходной трубы $s = 1,0\text{ м}^2$; - разность давлений, при котором открывается клапан, и которая поддерживается постоянной при протекании газа через турбину, $\delta P = 2,0\text{ м}$; - высота цилиндра над уровнем моря $z_0 = 7,0\text{ м}$; - период волны $T = 10\text{ с}$. - амплитуда волны $A = 5,0\text{ м}$.

Часть 1. Рабочий цикл установки.

1.1 Выразите давление воздуха в рабочем цилиндре (в метрах водяного столба) через атмосферное давление P_0 и высоты уровней воды вне цилиндра h и внутри его z .

Рассмотрим рабочий цикл установки. Считаем, что поверхность моря спокойна $h = 0$; вода в цилиндре находится также на нулевом уровне $z = 0$, давление воздуха внутри рабочего цилиндра равно атмосферному $P = P_0$. В момент времени $t = 0$ приходит волна.

1.2 Рассчитайте, при какой минимальной амплитуде волны $A_{\min}$, установка начнет вырабатывать электроэнергию.

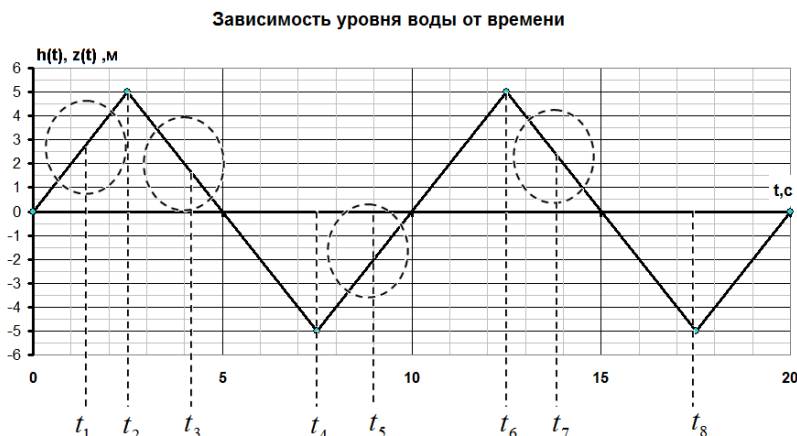
Далее будем считать, что амплитуда волн остается постоянной и равной $A = 5,0\text{ м}$.

1.3 Рассчитайте численные значения модуля скорости подъема и опускания уровня воды вне установки v .

В данной части задания необходимо описать цикл работы установки, то есть найти зависимости уровня воды $z(t)$ и давления воздуха $P(t)$ в рабочем цилиндре от времени. Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ $z = 0$ и $P = P_0$. Уровень воды снаружи установки изменяется по закону, приведенному ранее на графике. В Бланках ответов приведен график

этой зависимости.

На этом графике Вы должны построить зависимость $z(t)$. Для этого достаточно рассчитать значения указанных параметров в узловых точках, показанных на рисунке. Точки 1, 3, 5, 7 соответствуют открытию или закрытию клапана турбины генератора, их положение вам предстоит найти, поэтому на рисунке они показаны условно. График зависимости $z(t)$ можно изобразить в виде отрезков прямых между узловыми точками (за исключением участка 1-2).



1.4 Найдите явный вид зависимости уровня воды в цилиндре $z(t)$ в интервале времени от нуля до t_1 . Постройте график этой зависимости. **1.5** Найдите, в какой момент времени t_1 воздух начнет поступать в турбину. Рассчитайте уровень воды вне цилиндра h_1 , уровень воды z_1 и давление воздуха P_1 в цилиндре в этот момент времени. **1.6** Рассчитайте значения высоты уровня вне цилиндра h_k , уровня воды в цилиндре z_k , давления воздуха P_k в указанных узловых точках и соответствующие моменты времени t_k ($k = 1, 2, \dots, 8$). Полученные значения занесите в Таблицу 1 Листов ответов. Приведите (там, где это необходимо) формулы, по которым проведены расчеты. Постройте схематический график зависимости $z(t)$. **1.7** На отдельном бланке постройте схематическую диаграмму процесса изменения состояния воздуха в рабочем цилиндре в координатах $(P, (z_0 - z))$. **1.8** Укажите, начиная с какой узловой точки процесс далее будет периодически повторяться, укажите также конечную точку цикла.

Часть 2. Энергетические характеристики ВЭС.

В этой части задания Вы должны рассчитать энергетические характеристики рассматриваемой установки в режиме установившегося цикла ее работы. В данной части используйте обозначения и численные значения параметров, найденные в Части 1.

2.1 Укажите, на каких участках процесса (между какими узловыми точками) генератор вырабатывает электроэнергию. **2.2** Рассчитайте массу воздуха, который выходит из рабочего цилиндра за один цикл работы установки. **2.3** Оцените кинетическую энергию воздуха, выходящего из рабочего цилиндра на входе в турбину генератора за один цикл работы установки. **2.4** Рассчитайте работу, совершенную воздухом, выходящим из рабочего цилиндра, над турбиной генератора за один цикл работы установки. **2.5** Считая, что КПД электрогенератора равен $\eta_0 = 60\%$, рассчитайте среднюю мощность рассмотренной установки за один цикл ее работы.



Республиканская физическая олимпиада
2025 года

(Заключительный этап)

Теоретический тур

Решение

Задание 3. ВЭС – волновая электростанция. (Решение)

1.1 Давление воздуха внутри рабочего цилиндра следует из условия равновесия воды

$$P = P_0 + h - z \quad (1)$$

1.2 При подъеме уровня воды моря начнется подъем уровня воды в цилиндре и сжатие воздуха в нем. Так как клапан выпускной клапан открывается, если давление воздуха внутри цилиндра достигнет значения

$$P_2 = P_0 + \delta P \quad (2)$$

Чтобы генератор начал работать, необходимо, чтобы при максимальном подъеме уровня воды $h = A$ давление воздуха достигло значения, определяемого формулой (2). Так как процесс сжатия происходит при постоянной температуре и постоянной массе воздуха в цилиндре, то он описывается законом Бойля - Мариотта $PV = const$, которое можно записать в виде

$$(P_0 + A - z_2)(z_0 - z_2) = P_0 z_0 \quad (3)$$

Принимая во внимание формулу (2), получим, что максимальный уровень подъема воды в рабочем цилиндре должен стать равным z_2 , который можно найти из уравнения

$$(P_0 + \delta P)(z_0 - z_2) = P_0 z_0 \Rightarrow z_0 - z_2 = \frac{P_0}{P_0 + \delta P} z_0 \Rightarrow z_2 = \frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0. \quad (4)$$

Найденное значение позволяет найти минимальную высоту волны

$$P_0 + A - z_2 = P_0 + \delta P \Rightarrow A = \delta P + z_2. \quad (5)$$

Окончательно находим

$$A_{\min} = \frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0 + \delta P = 3,2 \text{ м.} \quad (6)$$

1.3 Модуль скорости движения воды снаружи равен

$$v = \frac{4A}{T} = 2,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (7)$$

1.4 Параметры в состоянии 1 задаются начальными условиями. На временном интервале между точками 1 и 2 (а также 2 и 3) подъем уровня воды вне цилиндра происходит по закону

$$h = vt \quad (8)$$

Процесс 1-2 (до открытия клапана) есть процесс изотермический при постоянной массе воздуха, поэтому описывается уравнением

$$(P_0 + h - z)(z_0 - z) = P_0 z_0. \quad (9)$$

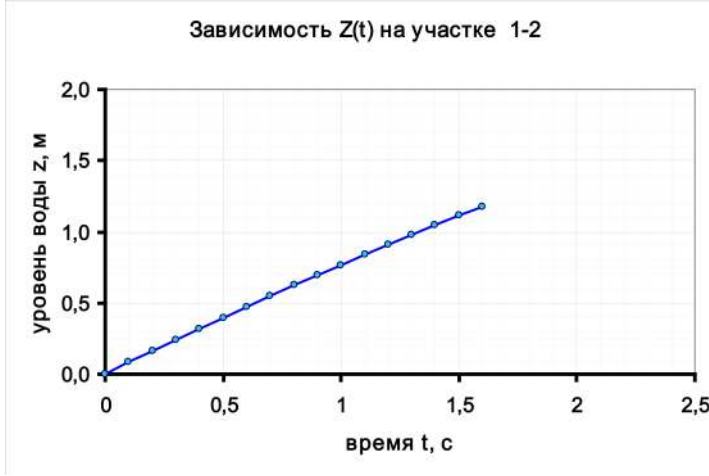
Из этого квадратного уравнения, которое после раскрытия скобок имеет стандартный вид

$$z^2 - z(P_0 + z_0 + h) + hz_0 = 0 \quad (10)$$

находим зависимость высоты уровня воды цилиндра от времени

$$z = \frac{(P_0 + z_0 + vt)}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + z_0 + vt)^2}{4} - vtz_0} \quad (11)$$

График этой зависимости показан на рисунке.



1.5 Для расчета характеристик воздуха в момент времени t_1 следует принять во внимание, что в этот момент открывается клапан, т.е. давление достигает значения

$$P_1 = P_0 + \delta P = 12\text{М}. \quad (12)$$

Тогда из уравнения (8) можно получить линейное уравнение

$$(P_0 + \delta P)(z_0 - z_1) = P_0 z_0. \quad (13)$$

Из которого легко находят все необходимые параметры воздуха в состоянии 2:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 - \frac{P_0}{P_0 + \delta P} z_0 = \frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0 = 1,17\text{М} \\ \delta P &= h_1 - z_1 \Rightarrow h_1 = z_1 + \delta P = \frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0 + \delta P = 3,17\text{М} \\ h_1 &= vt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{v} \left(\frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0 + \delta P \right) = 1,58\text{с} \end{aligned} \quad (14)$$

1.6 Участок 1-2. В момент времени t_2 клапан откроется и воздух начнет выходить в атмосферу, при это разность давлений с наружи и внутри будет оставаться постоянной и равной δP . Давление внутри, высота уровня воды внутри цилиндра и вне его будут описываться линейными функциями

$$\begin{aligned} h(t) &= vt \\ P(t) &= P_0 - \delta P = \text{const} \\ z(t) &= h - \delta P = h - vt \end{aligned} \quad (15)$$

В точке 3 параметры воздуха станут равными

$$\begin{aligned}
t_2 &= \frac{T}{4} = 2,5\text{с} \\
h_2 &= A = 5,0\text{м} \\
z_2 &= A - \delta P = 3,0\text{м} \\
P_2 &= P_0 - \delta P = 8,0\text{м}
\end{aligned} \tag{16}$$

Участок 2-3. Далее уровень воды вне цилиндра начнет уменьшаться, следовательно, начнет понижаться и уровень воды в рабочем цилиндре. Давление воздуха внутри уменьшится. поэтому клапан закроется. Поэтому процесс 3-4 будет изотермическим при постоянной массе газа, т.е. описываться уравнением

$$(P_0 + h - z)(z_0 - z) = (P_0 + \delta P)(A - \delta P) \tag{17}$$

Высота z будет уменьшаться до тех пор, пока давление внутри цилиндра не станет равным

$$P_3 = P_0 - \delta P = 8,0\text{м} \tag{18}$$

В этот момент воздух начнет поступать в цилиндр. Теперь из уравнения (17) с учетом выражения (18) можно рассчитать все характеристики состояния воздуха в точке 3:

$$\begin{aligned}
(P_0 - \delta P)(z_0 - z_3) &= (P_0 + \delta P)(A - \delta P) \Rightarrow z_3 = z_0 - \frac{(P_0 + \delta P)(A - \delta P)}{P_0 - \delta P} = 2,5\text{м} \\
P_0 + h_3 - z_3 &= P_0 - \delta P \Rightarrow h_3 = z_3 - \delta P = 0,50\text{м} \\
h_3 = A - v\Delta t &\Rightarrow \Delta t = \frac{A - h_3}{v} = 2,25\text{с} \Rightarrow t_3 = \frac{T}{4} + \Delta t = 4,75\text{с}
\end{aligned} \tag{19}$$

Участок 3-4. Далее процесс будет идти при постоянной разности давлений, вплоть до того момента пока уровень воды не начнет снова повышаться, т.е. на в точках 5 и 6 значения h определяются заданным в условии графиком. а значения z и P рассчитываются «в уме» по формулам

$$\begin{aligned}
P_4 &= P_0 - \delta P \\
z_4 &= h_4 + \delta P
\end{aligned} \tag{20}$$

Численные значения параметров в этой точке равны:

$$t_4 = 7,5\text{с}; \quad h_4 = -A = -5,0\text{м}; \quad z_4 = -A + \delta P = -3,0\text{м}; \quad P_5 = 8,0\text{м} \tag{21}$$

Участок 4-5. На участке 4-5 (при подъеме уровня воды) клапан опять закроется, масса воздуха в цилиндре будет неизменной, давление будет изотермически возрастет до открытия клапана (когда давление станет равным $P_5 = P_0 + \delta P$). Для определения параметров в состоянии 5 следует воспользоваться системой уравнений, которые аналогичны уравнениям, записанным ранее:

$$\begin{aligned}
(P_0 + \delta P)(z_0 - z_5) &= (P_0 - \delta P)(z_0 - z_5) = (P_0 - \delta P)(z_0 + A - \delta P) \\
(P_0 + \delta P) &= P_0 + h_5 - z_5
\end{aligned} \tag{21}$$

Из этой системы без труда находим:

$$z_5 = z_0 - \frac{P_0 - \delta P}{P_0 + \delta P}(z_0 + A - \delta P) = 0,33\text{м}$$

$$h_5 = z_5 + \delta P = 2,3\text{м}$$
(22)

Момент времени, когда уровень воды достигнет значения h_7 , находится из закона движения

$$-A + v(t_5 - t_4) = h_5. \quad (23)$$

Из которого вычисляем

$$t_5 = t_4 + \frac{A + h_5}{v} = 11,2\text{с} \quad (24)$$

Далее значения параметров h, z, P будут периодически повторяться. Т.е. значения в точке 6 совпадают со значениями в точке 2 и т.д. Для расчета времен следует прибавить период волны, т.е. 10 с. Все эти значения переписаны в Таблице 1.

Таблица 1. Узловые точки

Номер точки	время t , с	высота воды снаружи h , м	высота воды внутри z , м	Давление внутри точки снаружи h , м внутри z , м P , м
0	0	0	0	10
1	1,6	3,2	1,2	12
2	2,5	5,0	3,0	12
3	4,8	0,5	2,5	8,0
4	7,5	-5,0	-3,0	8,0
5	11,2	2,3	0,33	12
6	12,5	5,0	3,0	12
7	14,8	0,5	2,5	8,0
8	17,5	-5	-3	8,0

График рассчитанной зависимости (все данные, необходимые для построения графика приведены в Таблице 1) показан ниже.



1.7 Рассчитанные значения параметров позволяют построить диаграмму рабочего цикла рассматриваемой установки. Результат построения – на рисунке.

ия параметров
диаграмму
рассматриваемой
системы – на



1.8 Циклический процесс начинается в точке 2, конец цикла – точка 5.

Часть 2. Энергетические характеристики ВЭС.

2.1 Генератор вырабатывает электроэнергию, когда воздух проходит через турбину в любом направлении. Это происходит на участках цикла 3-4 (воздух всасывается внутрь рабочего цилиндра) и 5-6 (воздух выталкивается из цилиндра).

2.2 Воздух вытесняется из цилиндра на участке 5-6. На этом участке давление воздуха внутри цилиндра постоянно и равно $P = P_0 + \delta P$. Объем вытесненного воздуха равен

$$\Delta V = S(z_6 - z_5) \quad (25)$$

Масса вытесненного воздуха рассчитывается с помощью уравнения состояния

$$P\Delta V = \frac{\Delta m}{M}RT. \quad (26)$$

При численных расчетах необходимо все величины выразить в системе СИ (прежде всего это касается давления). Подставляя эти численные значения, находим

$$\Delta m = \frac{MS(P_0 + \delta P)(z_6 - z_5)}{RT} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 12 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot (3,0 - 0,33) \text{ м}}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot (273 + 7,0) \text{ К}} = 4,0 \text{ кг} \quad (27)$$

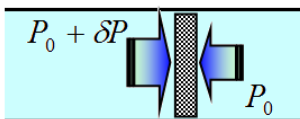
2.3 Для расчета кинетической энергии необходимо найти скорость движения выходящего газа. Так как давление воздуха в цилиндре и выходной трубе одно и то же, то плотность воздуха остается постоянной, поэтому справедливо уравнение

$$Sv = sv_1. \quad (28)$$

где v - найденная ранее скорость подъема воды в цилиндре, v_1 - скорость воздуха в выходной трубе. Таким образом, кинетическая энергия выходящего воздуха равна

$$E_{\text{кин.}} = \frac{\Delta m}{2}v_1^2 = \frac{\Delta m}{2} \left(\frac{S}{s}v \right)^2 = \frac{4,0 \text{ кг}}{2} \left(10 \cdot 2,0 \frac{\text{м}}{\text{с}} \right)^2 = 0,80 \cdot 10 \text{ Дж}. \quad (29)$$

Примечание. В реальности при протекании газа давления газа в цилиндре и в выходной трубе должны различаться, но по условию задачи этой разностью следует пренебрегать.



2.4 Можно считать, что со стороны цилиндра на турбину действует сила пропорциональная давлению в цилиндре, а с другой – пропорциональная атмосферному давлению. Поэтому работа, совершенная над турбиной генератора, должна рассчитываться по формуле

$$A_{5-6} = \delta P \cdot \Delta V = \delta P S(z_6 - z_5) \quad (30)$$

Подставим численные значения и проведем расчет

$$A_5 = \delta P S(z_6 - z_5) = 2,0 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot 10 \text{ м}^2 \cdot 2,7 \text{ м} = 5,4 \cdot 10^5 \text{ Дж} \quad (31)$$

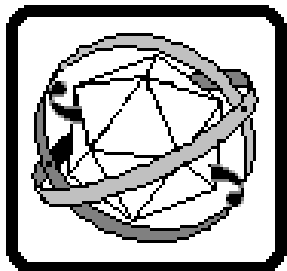
2.5 За полный цикл работа совершается и при всасывании воздуха (на участке 3-5). Ее можно рассчитать по формуле аналогичной формуле (30):

$$A_{3-4} = \delta P \cdot \Delta V = \delta P S(z_3 - z_4) = 2,0 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot 10 \text{ м}^2 \cdot 5,5 \text{ м} = 11 \cdot 10^5 \text{ Дж} \quad (32)$$

Учитывая коэффициент полезного действия электрогенератора, для средней мощности установки получаем выражение

$$N = \frac{\eta_0(A_{3-4} + A_{5-6})}{T} = \frac{0,60 \cdot (11 + 5,4) \cdot 10^4 \text{ Дж}}{10 \text{ с}} = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Вт}. \quad (33)$$

Округляя, получаем мощность данной установки – примерно 100 киловатт.



Республиканская физическая олимпиада

2025 года

(Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач