

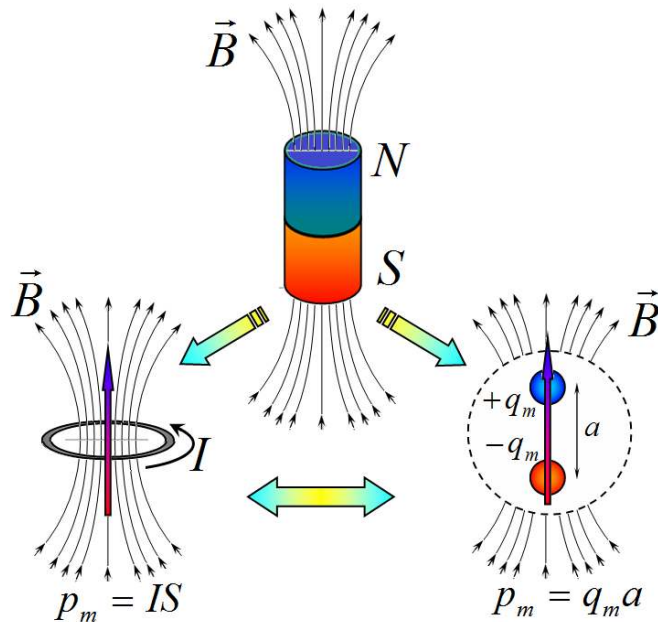
Условие

Задание 2. Взаимодействия цилиндрических магнитов

Описание магнитных полей и магнитных взаимодействий является математически более сложной задачей, чем описание электростатических взаимодействий. Во многом это связано с отсутствием точечных магнитных зарядов, из-за чего простейшим источником магнитного поля является магнитный диполь. Однако, во многих задачах можно формально (но математически корректно) ввести точечные магнитные заряды, не забывая при этом, что реально существующие источники магнитного поля имеют нулевой суммарный магнитный заряд. Такой подход используется в данном задании при расчете магнитных полей, создаваемых постоянными магнитами, и характеристик их взаимодействия.

Теоретическое введение.

Согласно современным представлениям магнитное поле постоянных магнитов создается токами намагничивания, протекающими по поверхности намагниченного тела (эта идея первоначально была сформулирована А.М. Ампером и часто называется гипотезой Ампера).



Таким образом, поле небольшого цилиндрического магнита эквивалентно полю кругового тока. В качестве основной характеристики витка с током выступает магнитный момент, который равен

$$p_m = IS, \quad (1)$$

где I - сила тока в контуре, S - площадь этого контура. Альтернативный подход к описанию поля цилиндрического магнита является рассмотрение поля магнитного диполя – частицы, состоящей из двух точечных противоположных магнитных зарядов ($+q_m$ и $-q_m$), находящихся на малом расстоянии a друг от друга. Магнитный момент в этом случае определяется как

$$p_m = q_m a, \quad (2)$$

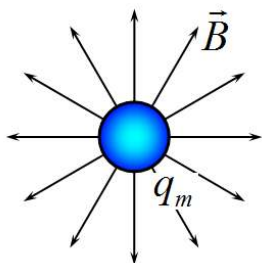
Отметим, что оба способа описания магнитных полей справедливы для точек, расстояние до которых от источников (магнита, кольца с током, магнитного диполя) значительно больше размеров самих источников. Считайте, что это условие выполняется во всех

пунктах данной задачи.

Точечный магнитный заряд q_m создает центральное магнитное поле, модуль вектора индукции которого определяется по закону, аналогичному закону Кулона для электростатических полей

$$B = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi R^2}, \quad (3)$$

здесь R - расстояние от точечного заряда, то точки, в которой рассчитывается поле, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн·м - магнитная постоянная.



На точечный магнитный заряд q_m со стороны магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ действует сила, равная

$$\vec{F} = q_m \vec{B} \quad (3)$$

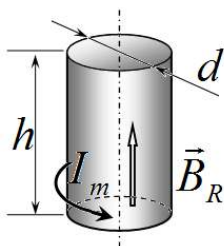
Основной характеристикой постоянных магнитов является остаточная намагниченность M_R , которая определяется как магнитный момент единицы объема $M_R = \frac{p_m}{\Delta V}$.

Эта величина обычно указывается в паспорте магнита. Вместо остаточной намагниченности также приводят величину $B_R = \mu_0 M_R$, которая называется остаточная индукция (т.е. индукция магнитного поля внутри магнита).

Еще раз подчеркнем, в настоящее время магнитных зарядов не обнаружена, поэтому величины магнитных зарядов q_m не должны входить в конечные результаты, которые должны выражаться через реальные характеристики магнитов – их магнитный момент p_m и намагниченность M .

Часть 1. Характеристики магнита.

В данной задаче рассматривается постоянный цилиндрический неодимовый магнит со следующими характеристиками: диаметр магнита $d = 4,0$ мм; высота магнита $h = 10,0$ мм; остаточная индукция поля магнита $B_R = 1,4$ Тл и направлена вдоль оси магнита; плотность материала магнита $\rho_{Nd} = 7,6 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

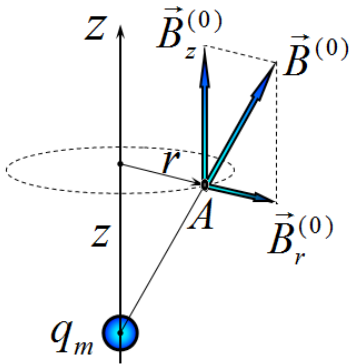


1.1 Рассчитайте массу магнита m . 1.2 Рассчитайте магнитный момент магнита p_m . 1.3 Рассчитайте силу тока намагничивания, текущего по боковой поверхности магнита I_m .

Часть 2. Магнитное поле магнита.

Рассмотрите магнитное поле, создаваемое точечным магнитным зарядом q_m . Точечный заряд находится в начале отсчета оси z . Положение произвольной точки задается координатой z

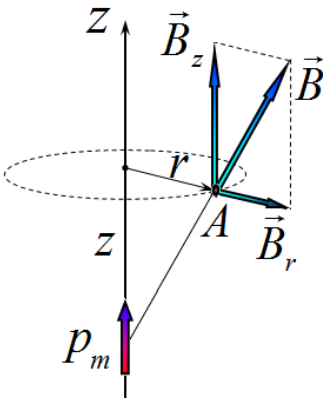
и расстоянием до этой оси r . В этом случае вектор индукции магнитного поля $\vec{B}^{(0)}$ разумно разложить на две компоненты: осевую $\vec{B}_z^{(0)}$, направленную параллельно оси z ; радиальную $\vec{B}_r^{(0)}$, направленную перпендикулярно оси.



2.1 Запишите формулы для осевой $B_z^{(0)}(z, r)$ и радиальной $B_r^{(0)}(z, r)$ компонент вектора индукции поля точечного заряда, как функции координат точки (z, r) .

Теперь Вам необходимо рассмотреть магнитное поле, создаваемое описанным цилиндрическим магнитом. Для расчета этого поля можно считать, что оно совпадает с магнитным полем магнитного диполя.

2.2 Нарисуйте схематически картину силовых линий магнитного поля, создаваемого магнитным диполем (цилиндрическим магнитом).



Пусть в начале оси z находится магнитный диполь с магнитным моментом p_m , направленным вдоль оси z . Положение произвольной точки A , как и ранее, задается координатами (z, r) .

2.3 Найдите зависимость осевой компоненты индукции поля магнитного диполя $B_z(z, r)$, от координат точки (z, r) . **2.4** Постройте схематический график зависимости осевой компоненты вектора индукции $B_z(z_0, r)$ от координаты r при некотором фиксированном значении координаты $z_0 > 0$. **2.5** Найдите зависимость индукции поля на оси z в зависимости от координаты z - $B_z(z)$.

2.6 Найдите зависимость радиальной компоненты индукции поля магнитного диполя $B_r(z, r)$, от координат точки (z, r) . **2.7** Постройте схематический график зависимости радиальной компоненты вектора индукции $B_r(z, r_0)$ от координаты z при некотором фиксированном значении координаты $r_0 > 0$. **2.8** Найдите значения модуля координаты $z = b$, при котором модуль функции $B_z(z, r_0)$ принимает максимальные значения $B_{r, \max}$. Найдите, чему равно это максимальное значение.

Примечания. 1. Вы можете построить схематические графики, даже если вам не удалось получить явные функциональные зависимости – это будет оценено! 2. Для облегчения вашей работы дадим математическую подсказку. Если величина a мала, то для расчета поля диполя

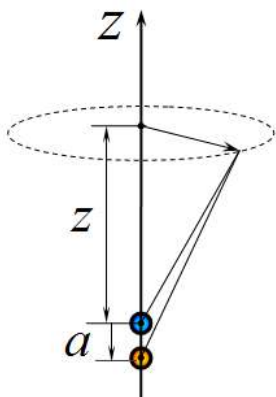
Вы можете использовать следующее приближение, справедливое для любой функции

$$F(z+a) \approx F(z) + F'_z(z) \cdot a. \quad (4)$$

где $F'(z)$ - производная функции $F(z)$, вычисленная в точке z . 3. При необходимости Вы можете использовать приближенную формулу

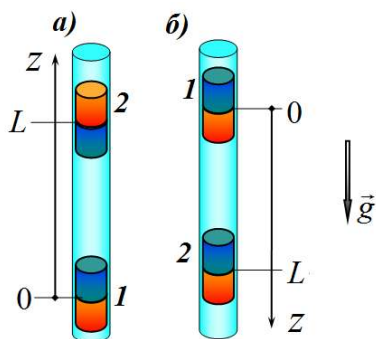
$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x, \quad (5)$$

справедливую при $x \ll 1$ и любых степенях γ .



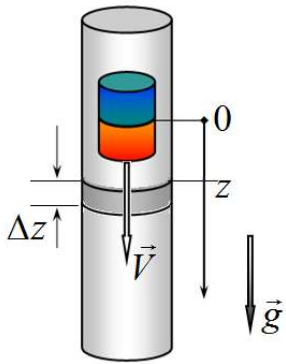
Часть 3. Притяжение и отталкивание.

Два одинаковых цилиндрических магнита помещены в вертикальную стеклянную трубку. Магнит 1 закреплён, магнит 2 может свободно двигаться вдоль трубки. Расстояние между магнитами можно считать значительно больше размеров магнитов. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Ответы выразите через магнитный момент магнитов p_m и их массу m .



3.1 Найдите зависимость силы магнитного взаимодействия между магнитами, как функцию расстояния z между ними. 3.2 Найдите, при каком расстоянии между магнитами L , магнит 2 может находиться в равновесии. Рассмотрите два случая, а) и б) ориентации магнитов, показанные на рисунке. 3.3 Укажите, какой из экспериментов, а) или б) может быть продемонстрирован экспериментально. Ответ кратко обоснуйте. 3.4 Рассчитайте численное значение равновесного расстояния L , для магнитов, параметры которого приведены в Части 1.

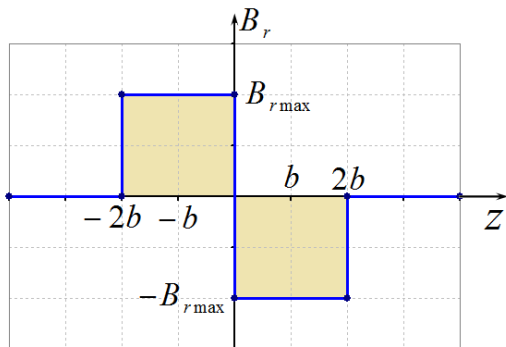
Часть 4. Магнитная вязкость – токи Фуко.



Цилиндрический магнит помещают внутрь длинной вертикальной тонкостенной алюминиевой трубки. Внутренний радиус трубки равен $r_0 = 3,0$ мм, толщина стенок равна $h_0 = 0,30$ мм. Удельное электрическое сопротивление алюминия равно $\rho = 2,8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м. По-прежнему, считаем массу магнита m и его магнитный момент p_m известными. Пусть скорость движения магнита постоянна и равна V . Выделим на стенке трубки тонкий слой толщиной Δz , находящийся на расстоянии z от середины магнита. В пп. 4.1 – 4.4 ответы выразите через параметры магнитного поля b и $B_{r\max}$, найденные в п. 2.8.

4.1 Найдите силу индуцированного тока ΔI , протекающего по выделенному кольцу Δz . 4.2 Найдите мощность теплоты, выделяющейся в трубке при движении магнита. 4.3 Найдите силу вязкого магнитного трения, действующую на движущийся магнит. 4.4 Найдите скорость установившегося падения магнита в трубке V . 4.5 Рассчитайте численное значение скорости падения магнита, характеристики которого приведены в Части 1.

Примечание. *Зависимость радиальной составляющей магнитного поля магнита на стенке трубки можно приближенно заменить на ступенчатую функцию, показанную на рисунке. Используйте параметры этой функции b и $B_{r\max}$, найденные в п. 2.8. Если вам не удалось найти ответы в п.2.8, то в данной части считайте их известными.*



Решение

Задание 2. Взаимодействия цилиндрических магнитов (Решение)

Часть 1. Характеристики магнита.

1.1 Так как, плотность и геометрические размеры цилиндрического магнита заданы, то расчет его массы труда не представляет:

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi d^2}{4} h = 7,6 \cdot 10^3 \frac{\pi \cdot (4,0 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10,0 \cdot 10^{-3}}{4} = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ кг.} \quad (1)$$

1.2 Магнитный момент магнита рассчитывается по определению намагниченности

$$M_R = \frac{p_m}{V} \Rightarrow p_m = M_R V. \quad (2)$$

Используя заданную связь между намагниченностью и остаточной индукцией $B_R = \mu_0 M_R$, получим требуемый результат

$$p_m = M_R V = \frac{B_R}{\mu_0} \cdot \frac{\pi d^2}{4} h = 0,14 \text{ А} \cdot \text{м}^2. \quad (3)$$

1.3 Расчет силы тока намагничивания можно провести по формуле магнитного момента, выражаемого через силу тока намагничивания

$$p_m = IS \Rightarrow I_m = \frac{p_m}{S} = \frac{B_R V}{\mu_0 S} = \frac{B_R}{\mu_0} h. \quad (4)$$

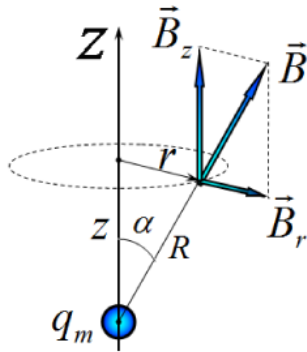
Численный расчет можно провести по любой из приведенных формул

$$I_m = \frac{B_R}{\mu_0} h = \frac{1,6}{4\pi \cdot 10^{-7}} 10 \cdot 10^{-3} = 1,1 \cdot 10^4 \text{ А.} \quad (5)$$

Поразительно, удивительно, но...

Часть 2. Магнитное поле магнита.

2.1 Требуемые компоненты индукции поля точечного магнитного заряда находятся из формулы «типа Кулона» $B = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi R^2}$ и рисунка:



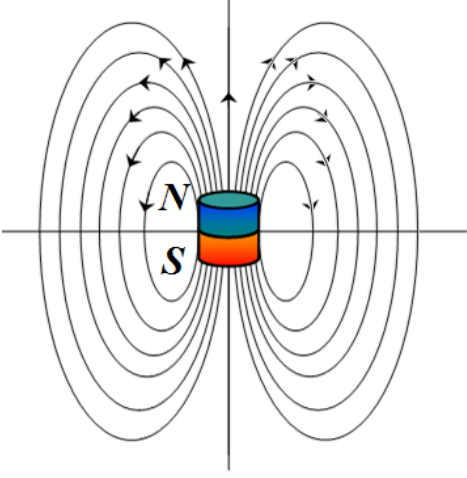
(5)

(6)

$$B_z^{(0)}(z, r) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi R^2} \cos \alpha = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

$$B_r^{(0)}(z, r) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi R^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

2.2 Картина силовых линий магнитного диполя (поля линейного магнита, поля кругового тока, поля Земли и т.д.) приводится во всех учебниках физики, начиная с детского сада.



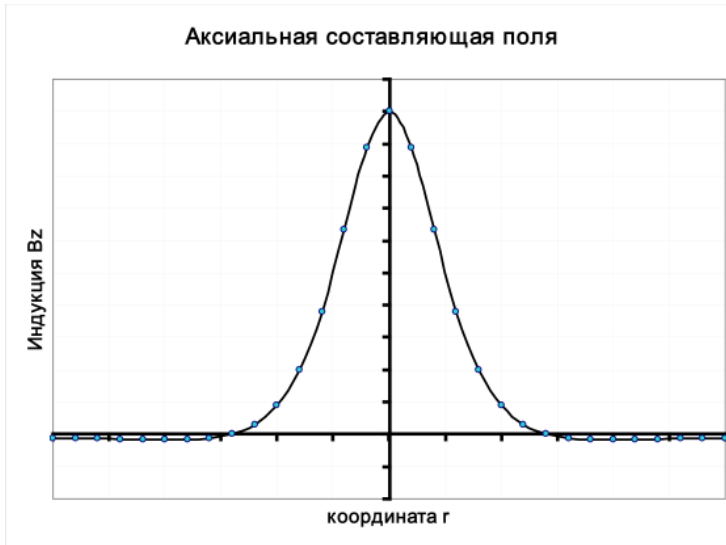
2.3 Для решения данного пункта задачи можно воспользоваться подсказкой, приведенной в условии. Второй подход – используя принцип суперпозиции, записать точное выражение для индукции поля и провести разложение полученного выражения по малому параметру a . Здесь приведено решения по первому, более короткому пути.

$$B_z(z, r) = B_z^{(0)}(z, r) - B_z^{(0)}(z + a, r) = - \left(B_z^{(0)}(z, r) \right)'_z \cdot a. \quad (7)$$

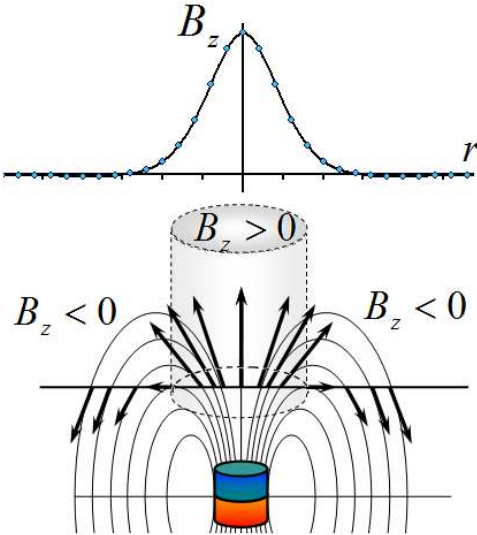
Аккуратное вычисление производной от функции (5) приводит к результату:

$$\begin{aligned} B_z(z, r) &= - \left(B_z^{(0)}(z, r) \right)'_z \cdot a = - \frac{\mu_0 q_m a}{4\pi} \left(\frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right)' = \\ &= - \frac{\mu_0 q_m a}{4\pi} \frac{(z^2 + r^2)^{3/2} - z \cdot \frac{3}{2} (z^2 + r^2)^{1/2} \cdot 2z}{(z^2 + r^2)^3} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{2z^2 - r^2}{(z^2 + r^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (8)$$

2.4 Схематический график этой функции можно построить на основе качественного анализа (функция четная, нули функции при $r = \pm\sqrt{2}z$, очевидны участки монотонности, стремление к нулю с отрицательной стороны при $z \rightarrow \pm\infty$). Результат построения показан на рисунке.



Данный график можно построить и на основании анализа картины силовых линий – просто рассматривая знак проекции вектора индукции поля (как показано на следующем рисунке).



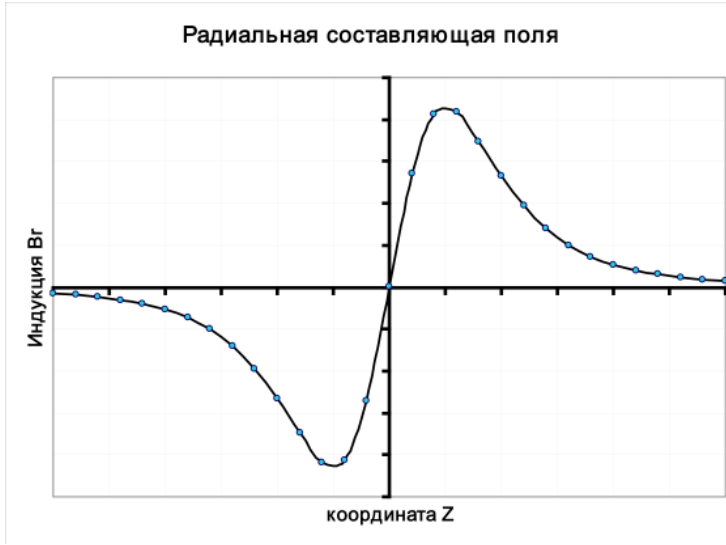
2.5 Значения индукции поля на оси можно получить, полагая $r = 0$ в формуле (8):

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{2z^2 - r^2}{(z^2 + r^2)^{5/2}} \Big|_{r=0} = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi z^3}. \quad (9)$$

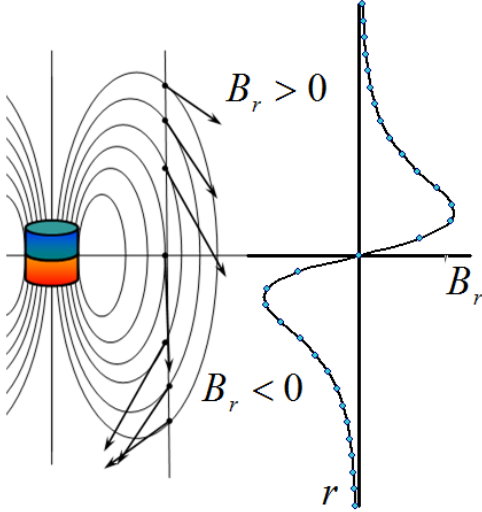
2.6 Радиальная компонента поля рассчитывается аналогично (и несколько проще):

$$\begin{aligned} B_r(z, r) &= B_r^{(0)}(z, r) - B_r^{(0)}(z + a, r) = - \left(B_r^{(0)}(z, r) \right)'_z \cdot a = \\ &= - \frac{\mu_0 q_m a}{4\pi} \cdot \left(\frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right)' = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \cdot \frac{3}{2} \frac{r \cdot 2z}{(z^2 + r^2)^{5/2}} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{3zr}{(z^2 + r^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

2.7 График этой функции также строится на основе качественного анализа (функция нечетная: обращается в нуль при $z = 0$; стремится к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$). Результат – на рисунке.



Схематический график этой зависимости можно также построить на основании анализа картины силовых линий (см. рисунок).



2.8 Поиск экстремумов функции проводится стандартным методом – в точках экстремумов производная функции обращается в нуль. Поэтому вычислим производную от функции (10) и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned}
 (B_r(z, r))'_z &= \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} 3r \left(\frac{z}{(z^2 + r^2)^{5/2}} \right)'_z = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} 3r \frac{(z^2 + r^2)^{5/2} - z \frac{5}{2} (z^2 + r^2)^{3/2} \cdot 2z}{(z^2 + r^2)^5} = \\
 &= \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} 3r \frac{r^2 - 4z^2}{(z^2 + r^2)^{7/2}} = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

Из полученного уравнения следует, что положение экстремума $z^* = \pm b = \pm \frac{r}{2}$. Значения функции в экстремуме равно

$$B_{r \max}(z, r) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{3zr}{(z^2 + r^2)^{5/2}} \Bigg|_{z=\frac{r}{2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{5} \right)^{5/2} \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{1}{r^3} = C \frac{\mu_0 p_m}{r^3}. \tag{12}$$

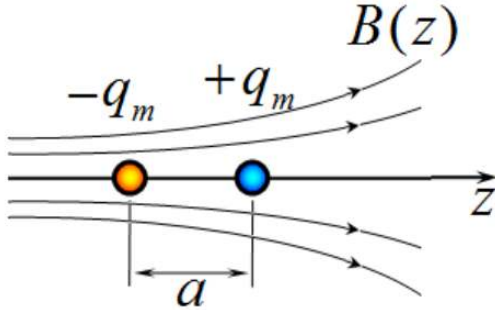
Здесь безразмерная константа равна $C = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{4}{5} \right)^{5/2} \approx 0,068$. Таким образом, полный ответ на вопросы данного пункта:

$$b = \frac{r}{2}; \quad B_{r \max} = C \frac{\mu_0 p_m}{r^3}; \quad C = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{4}{5} \right)^{5/3} \approx 0,068. \quad (13)$$

Часть 3. Притяжение и отталкивание.

3.1 Рассмотрим магнитный диполь, находящийся в неоднородном магнитном поле $B(z)$. Ось диполя совпадает с направлением поля (что соответствует условию рассматриваемой задачи). В этом случае суммарная сила, действующая на диполь, равна

$$F = -q_m B(z) + q_m B(z + a). \quad (14)$$



Учитывая малость величины a , это выражение можно преобразовать к виду

$$F = -q_m B(z) + q_m B(z + a) = q_m a \frac{B(z + a) - B(z)}{a} \approx p_m B'(z). \quad (15)$$

где $B'(z)$ - производная от зависимости индукции поля по координате. Зависимость индукции поля на оси от координаты задается формулой (9). Поэтому сила взаимодействия между магнитами равна

$$F = p_m B'(z) = p_m \left(\frac{\mu_0 p_m}{2\pi z^3} \right)' = -\frac{3\mu_0 p_m^2}{2\pi z^4}. \quad (15)$$

3.2 При ориентации магнитов, указанной на рис. а), сила магнитного отталкивания уравновешивает силу тяжести:

$$\frac{3\mu_0 p_m^2}{2\pi L^4} = mg. \quad (16)$$

Из этого уравнения находим искомое расстояние

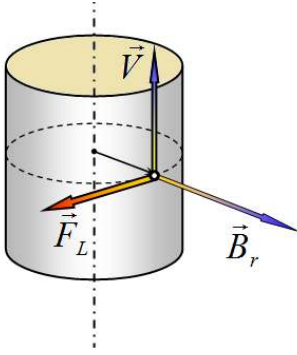
$$L = \sqrt[4]{\frac{3\mu_0 p_m^2}{2\pi mg}}. \quad (17)$$

3.3 Реализовать экспериментально можно только вариант, а), так как в этом случае положение равновесия является устойчивым. В случае б) положение равновесия неустойчивое.

3.4 Подстановка ранее найденных численных значений параметров в формулу (17) приводит к результату:

$$L = 3,3 \text{ см.} \quad (17)$$

Часть 4. Магнитная вязкость – токи Фуко.



4.1 При движении магнита в каждой точке стенке трубки изменяется магнитное поле, в следствие чего в ней возникают электрические токи, называемые тока Фуко. Для расчета их характеристики удобно перейти в систему отсчета, связанную с магнитом. В этой системе трубка движется магнитном поле, поэтому источником ЭДС является сила Лоренца, действующая на заряды, которая возникает благодаря радиальной составляющей индукции поля магнита. Сила Лоренца направлена по касательной к поверхности трубки. Величина этой силы равна

$$F_L = qV B_r. \quad (18)$$

Соответственно, ЭДС, возникающая в контуре, охватывающем трубку равна

$$\varepsilon = \frac{1}{q} F_L \cdot 2\pi r_0 = 2\pi r_0 B_r V. \quad (19)$$

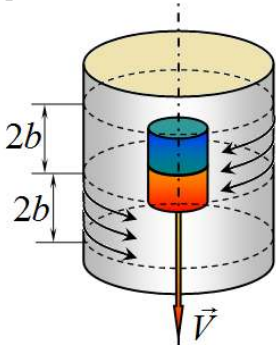
Теперь с помощью закона Ома определим силу тока

$$\Delta I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{\rho \frac{2\pi r_0}{\Delta z h_0}} = \frac{2\pi r_0 B_r V}{\rho \frac{2\pi r_0}{\Delta z h_0}} = \frac{B_r V \Delta z h_0}{\rho}. \quad (20)$$

Наконец, воспользуемся рекомендуемым приближением для функциональной зависимости радиальной составляющей поля:

$$\Delta I = \frac{B_{r_{\max}} V \Delta z h_0}{\rho}. \quad (20)$$

4.2 Ток возникает во всех частях трубки, в которых имеется радиальное магнитное поле. В рамках используемого «ступенчатого» приближения радиальная составляющая имеется в полосе шириной 4β . Отметим, что направление тока не существенно, так как мощность выделяющейся теплоты не зависит от направления тока. Поэтому можно записать, что «эффективная» сила тока равна



$$I = \frac{B_{r_{\max}} V h_0}{\rho} \cdot 4b. \quad (21)$$

Мощность теплоты, выделяющейся в трубке, рассчитывается по закону Джоуля – Ленца:

$$P = I^2 R, \quad (22)$$

где $R = \rho \frac{2\pi r_0}{4bh_0}$ - электрическое сопротивление части стенки трубки.

по которой протекает электрический ток. Собирая все промежуточные результаты, получим результат

$$P = \left(\frac{B_{r_{\max}} V h_0}{\rho} \cdot 4b \right)^2 \rho \frac{2\pi r_0}{4bh_0} = \frac{8\pi r_0 b h_0}{\rho} B_{r_{\max}}^2 V^2. \quad (23)$$

4.3 Рассчитанную мощность теплоты можно связать с мощностью, развиваемой силой вязкого магнитного трения:

$$P = F \cdot V. \quad (24)$$

С помощью формулы (24) находим явное выражение для этой силы

$$F = \frac{8\pi r_0 b h_0}{\rho} B_{r_{\max}}^2 V. \quad (25)$$

4.4 Приравняем найденное значение силы вязкого трения к силе тяжести падающего магнита

$$\frac{8\pi r_0 b h_0}{\rho} B_{r_{\max}}^2 V = mg, \quad (26)$$

Откуда найдем формулу для скорости установившегося движения

$$V = \frac{mg\rho}{8\pi r_0 b h_0 B_{r_{\max}}^2}. \quad (27)$$

4.5 Осталось добросовестно провести численные расчеты: $B_{r_{\max}} = C \frac{\mu_0 p_m}{r_0^3} = 0,45$ Тл;

$$V = \frac{mg\rho}{8\pi r_0 b h_0 B_{r_{\max}}^2} = 3,9 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \quad (28)$$