

среднее значение физической величины

Условие

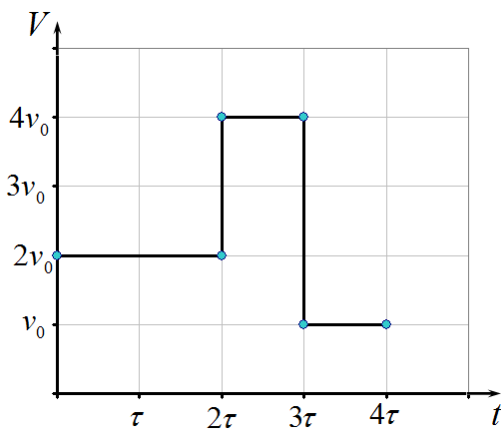
Задание 1. Поговорим о средних...

В различных разделах физики часто используется понятие «среднее значение физической величины». Однако это понятие не является однозначным, потому, что «средние» могут быть разными! В каждом конкретном случае, надо точно определять о каком именно «среднем» идет речь. В данном задании Вам необходимо продемонстрировать понимание этой проблемы.

Примечания. 1. Все числа, фигурирующие в условии задачи, считайте точными. 2. В решении допускается проведение промежуточных численных расчетов.

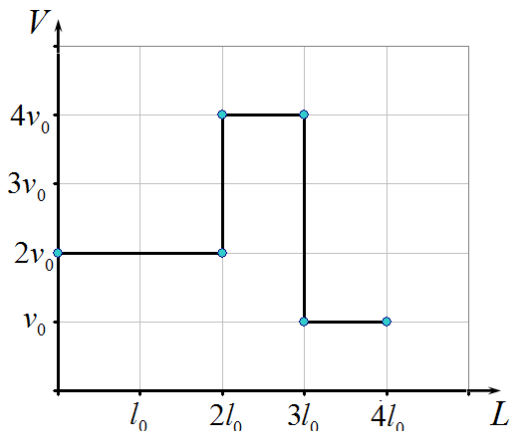
Задача 1.1 Средняя скорость.

Определение. Тело движется с переменной скоростью $v(t)$ в течение промежутка времени t_0 . Средней скоростью называется скорость равномерного движения $\langle v \rangle$, при которой за тот же промежуток времени t_0 тело проходит такое же расстояние, как и при движении с заданной переменной скоростью $v(t)$.



1.1.1 Автомобиль движется по прямой. На рисунке представлена зависимость скорости автомобиля от времени. Величины τ и v_0 считайте известными.

1.1.1 Найдите среднюю скорость точки за все время движения 4τ .

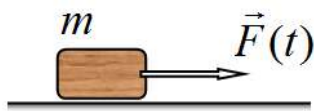


1.1.2 Автомобиль движется по прямой. На рисунке представлена зависимость скорости автомобиля от пройденного пути. Величины l_0 и v_0 считайте известными.

1.1.2 Найдите среднюю скорость точки на всем пути $4l_0$.

Задача 1.2 Средняя сила.

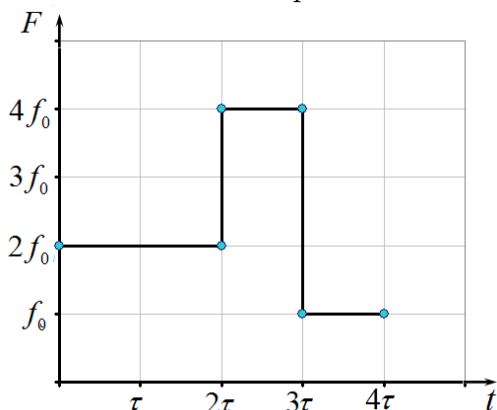
Пусть тело движется по прямой под действием переменной результирующей силы $F(t)$, направление которой совпадает с направлением вектора скорости тела.



Определение 1. «Средней импульсной» силой $\langle F \rangle_P$ назовем такую постоянную силу, которая сообщает телу такой же импульс, как и заданная переменная сила $F(t)$.

Определение 2. «Средней энергетической» силой $\langle F \rangle_E$ назовем такую постоянную силу, которая на всем участке пути совершает над телом такую же работу, как и переменная сила $F(t)$.

Тело массы m движется по прямой под действием переменной результирующей силы $F(t)$, направление которой совпадает с направлением вектора скорости тела. Зависимость модуля этой силы от времени показана на рисунке. Величины τ и F_0 считайте известными. В начальный момент времени $t = 0$ скорость тела равна v_0 .



1.2.1 Рассчитайте, чему равна «средняя импульсная» сила, действующая на тело, за все время движения 4τ .

1.2.2 Рассчитайте, чему равна «средняя энергетическая» сила, действующая на тело, за все время движения 4τ . 1.2.3 Рассчитайте «среднюю энергетическую» силу при нулевой начальной скорости $v_0 = 0$

Задача 1.3 Средняя сила тока.

Через резистор, сопротивление которого постоянно и равно R , протекает электрический ток. сила которого зависит от времени $I(t)$.

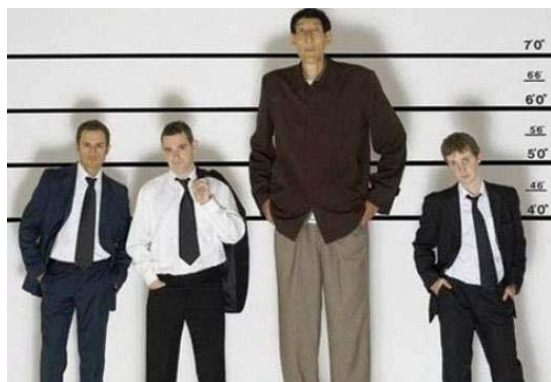
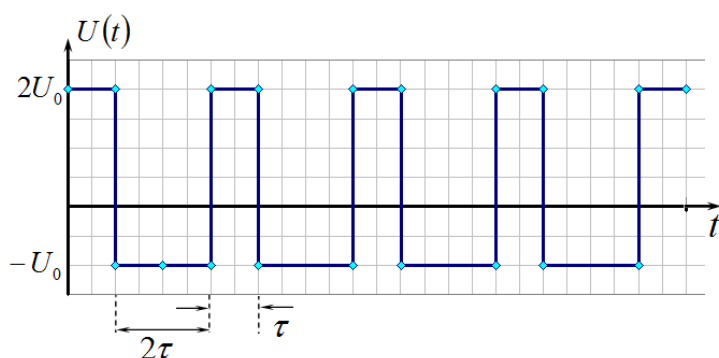
Определение 1. «Средней зарядовой» силой тока $\langle I \rangle_q$ назовем силу постоянного тока, при которой заряд, протекающий через резистор за некоторый промежуток времени Δt , равен заряду, протекающему через резистор за тот же промежуток времени Δt при изменяющейся силе тока $I(t)$.

Определение 2. «Средней тепловой» силой тока $\langle I \rangle_Q$ назовем силу постоянного тока, при которой количество теплоты, выделяющейся на резисторе за промежуток времени Δt , равно количеству теплоты, выделяющейся на резисторе за тот же промежуток времени при изменяющейся силе тока $I(t)$.

Напряжение на постоянном резисторе, сопротивление которого равно R , изменяется по периодическому закону $U(t)$, график которого показан на рисунке. Величины τ и U_0 считайте известными.

1.3.1 Вычислите «среднюю зарядовую» силу тока за промежуток времени Δt значительно превышающий τ .

1.3.2 Вычислите «среднюю тепловую» силу тока за промежуток времени Δt значительно превышающий τ .



Решение

Задание 1. Поговорим о средних... (решение)

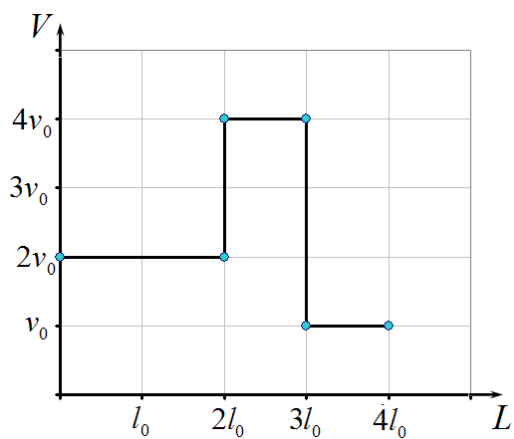
Задача 1.1 Средняя скорость.

1.1.1 Расчет средней скорости в данном случае проводится традиционно. Пройденный путь численно равен площади под графиком зависимости $v(t)$:

$$S = \sum_k v_k \Delta t_k = 2v_0 \cdot 2\tau + 4v_0\tau + v_0\tau = 9v_0\tau. \quad (1)$$

Следовательно, средняя скорость за все время движения будет равна

$$\langle v \rangle = \frac{S}{\Delta t} = \frac{9v_0\tau}{4\tau} = \frac{9}{4}v_0. \quad (2)$$

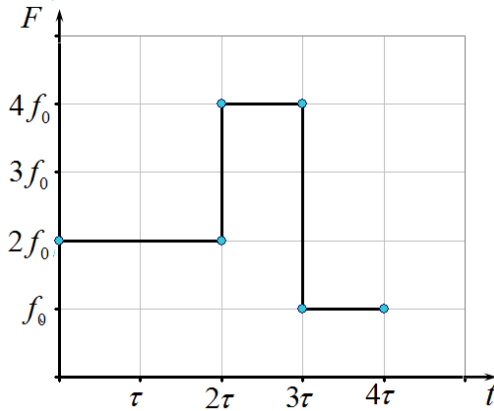


1.1.2 В данном случае пройденный путь известен, необходимо рассчитать время движения, что также делается элементарно

$$\Delta t = \sum_k \frac{l_k}{v_k} = \frac{2l_0}{2v_0} + \frac{l_0}{4v_0} + \frac{l_0}{v_0} = \frac{9}{4} \frac{l_0}{v_0} \quad (3)$$

Средняя скорость равна

$$\langle v \rangle = \frac{S}{\Delta t} = \frac{4l_0}{\frac{9}{4} \frac{l_0}{v_0}} = \frac{16}{9} v_0. \quad (4)$$



Задача 1.2 Средняя сила.

$$\langle F \rangle_p = \frac{9}{4} f_0 \quad (3)$$

1.2.1 Согласно второму закону Ньютона изменение импульса тела равно импульсу действующей силы

$$\Delta p = F \Delta t. \quad (1)$$

Данное в условии задачи определение «средней импульсной» силы может быть записано в виде соотношения

$$\langle F \rangle_p \cdot 4\tau = 2f_0 \cdot 2\tau + 4f_0\tau + f_0\tau = 9f_0\tau \quad (2)$$

Откуда следует, что «средняя импульсная» сила в данном случае равна

$$\langle F \rangle_p = \frac{9}{4} f_0 \quad (3)$$

1.2.2 Работа, совершенная постоянная силой, рассчитывается по формуле

$$\Delta A = F \Delta S. \quad (4)$$

Из определения «средней энергетической» силы следует соотношение

$$(F)_E \cdot (S_1 + S_2 + S_3) = F_1 S_1 + F_2 S_2 + F_3 S_3 \quad (5)$$

где S_i - путь, пройденный телом на i - том участке. Для расчета этих путей следует воспользоваться законами равноускоренного движения: - изменение скорости

$$\Delta v = a \Delta t; \quad (6)$$

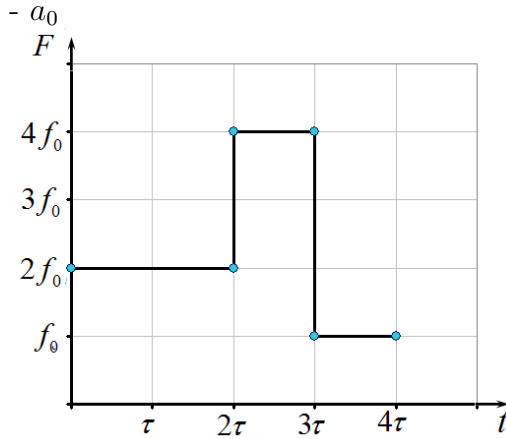
- пройденный путь

$$\Delta S = v_0 \tau + \frac{1}{2} a \tau^2 = \frac{v_0 + v}{2} \tau, \quad (7)$$

где v, v_0 - скорости в начале и конце рассматриваемого временного интервала, a - постоянное ускорение на данном интервале. Обозначим

$$a_0 = \frac{f_0}{m}. \quad (8)$$

Тогда ускорение на первом временном интервале будет равно $2a_0$, на втором - $4a_0$, на третьем



Для удобства представим все расчеты таблице. В последней строке суммарный пройденный путь и суммарная совершенная работа

интервал времени	ускорение	начальная скорость	конечная скорость	Пройденный путь	Работа на участке	время	скорость	скорость	путь
$0 \rightarrow 2\tau$	$2a_0$	v_0	$v_0 + 4a_0\tau$	$2v_0\tau + 4a_0\tau^2$	$2f_0(2v_0\tau + 4a_0\tau^2)$				
$2\tau \rightarrow 3\tau$	$4a_0$	$v_0 + 4a_0\tau$	$v_0 + 4a_0\tau + 4a_0\tau = v_0 + 8a_0\tau$	$v_0\tau + 6a_0\tau^2$	$4f_0(v_0\tau + 6a_0\tau^2)$				
$3\tau \rightarrow 4\tau$	a_0	$v_0 + 8a_0\tau$	$v_0 + 8a_0\tau + a_0\tau = v_0 + 9a_0\tau$	$v_0\tau + \frac{17}{2}a_0\tau^2$	$f_0(v_0\tau + \frac{17}{2}a_0\tau^2)$				
$0 \rightarrow 3\tau$				$4v_0\tau + \frac{37}{2}a_0\tau^2$	$f_0(9v_0\tau + \frac{81}{2}a_0\tau^2)$				

В итоге с помощью формулы (5) получаем, что «средняя энергетическая» сила равна

$$\langle F \rangle_E = f_0 \frac{(9v_0 + \frac{81}{2}a_0\tau)}{(4v_0 + \frac{37}{2}a_0\tau)}. \quad (9)$$

1.2.3 При $v_0 = 0$ из формулы (9) получаем

$$\langle F \rangle_E = \frac{81}{37} f_0, \quad (10)$$

что отличается от «средней импульсной» силы.

Задача 1.3 Средняя сила тока.

В условии задачи задана зависимость напряжения от времени $U(t)$. Зависимость силы тока от напряжения будет аналогичной. Обозначим

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \quad (1)$$

- значение силы тока через резистор, при напряжении U_0 .

Так как сила тока изменяется по периодическому закону, то достаточно рассчитать средние значения по одному периоду изменения тока. В условии задачи

1.3.1 Заряд, протекающий через резистор при постоянной силе тока I за промежутки времени Δt определяется по формуле

$$q = I \Delta t. \quad (2)$$

Поэтому по определению средней зарядовой силы тока можно записать формулу для расчета этой средней силы

$$\langle I \rangle_q \cdot 3\tau = I_1 \tau + I_2 \cdot 2\tau. \quad (3)$$

Используя приведенный в условии график зависимости $U(t)$, находим «среднее зарядовое» значение силы тока

$$\langle I \rangle_q = \frac{I_1 \cdot \tau + I_2 \cdot 2\tau}{3\tau} = \frac{\frac{2U_0}{R} \cdot \tau - \frac{U_0}{R} \cdot 2\tau}{3\tau} = 0 \quad (4)$$

1.3.2 Количество теплоты, выделяющейся в проводнике при протекании постоянного тока, определяется законом Джоуля – Ленца

$$Q = \frac{U^2}{R} \Delta t. \quad (5)$$

Поэтому для «средней тепловой» силы тока следует записать

$$\frac{\langle I \rangle_Q^2}{R} \cdot 3\tau = \frac{(2U_0)^2}{R} \cdot \tau + \frac{(-U_0)^2}{R} \cdot 2\tau = 6 \frac{U_0^2}{R} \tau \quad (6)$$

Из последней формула находим «среднее тепловое» значение силы тока

$$\langle I \rangle_Q = \sqrt{\frac{6U_0^2 \tau}{3R\tau}} = \sqrt{2} I_0 \quad (7)$$

Заметим, что «среднее тепловое» называется «действующим» значением силы тока и широко используется в электротехнике.

