

Условие

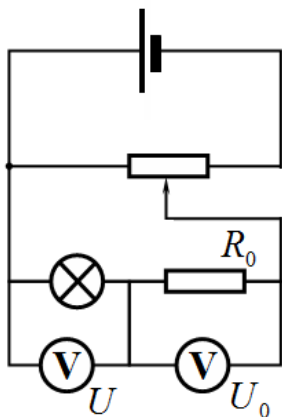
Задание 2. Изучение лампочки накаливания

При подготовке к Новому году Федор решил самостоятельно изготовить гирлянду из лампочек накаливания. Чтобы сразу не сжечь все имеющиеся лампочки, и чтобы они нормально светились, Федор решил провести экспериментальные исследования характеристик этого нехитрого прибора.

Часть 1. Вольтамперная характеристика лампочки.

Федор переключил мультиметр в режим омметра и измерил сопротивление лампочки при комнатной температуре $t_0 = 23^\circ\text{C}$, оно оказалась равным $R_{0,\text{л}} = 1,92\text{ Ом}$.

Основной характеристикой любого элемента электрической цепи является ВАХ – вольтамперная характеристика – зависимость силы тока от приложенного напряжения. Для ее измерения Федор собрал электрическую цепь, показанную на рисунке.



Изменяя сопротивление переменного резистора, Федор измерил значения напряжений на лампочке U и на постоянном резисторе (сопротивление которого $R_0 = 0,62\text{ Ом}$) – U_0 .

Результаты измерений приведены в Таблице 1 Листов ответов.

1.1 Постройте график вольтамперной характеристики лампочки накаливания по результатам измерений Федора.

Результаты необходимых расчетов приведите в свободных столбцах Таблицы 1, укажите формулы, по которым Вы провели расчет, график постройте на бланке Листов ответов.

Для проверки своих измерений и построений Федор собрал цепь из трех последовательно соединенных лампочек и подключил к источнику напряжения $U_1 = 4,5\text{ В}$.

1.2 Чему равна потребляемая мощность P_1 в этой цепи?

После этого Федор соединил эти 3 лампочки параллельно и подключил к тому же источнику напряжения $U_1 = 4,5\text{ В}$.

1.3 Чему равна потребляемая мощность P_2 в этой цепи?

Для теоретического описания проведенного эксперимента Федор решил использовать следующие приближения:

1) Сопротивление лампочки линейно зависит от ее температуры t :

$$R = R_0(1 + \alpha(t - t_0)) \quad (1)$$

Температурный коэффициент сопротивления вольфрама Федор нашел в справочнике $\alpha = 5,0 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$. Здесь K – градус Кельвина. Температура по абсолютной шкале Кельвина связана с температурой по шкале Цельсия простым соотношением

$$T(^{\circ}\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273,15^{\circ}\text{K}. \quad (2)$$

2) Мощность тепловых потерь лампочки (т.е. количество теплоты уходящей в воздух в единицу времени) пропорциональна разности температур нити накаливания t и окружающего воздуха t_0 :

$$P = \beta(t - t_0) \quad (3)$$

где β - неизвестный постоянный коэффициент, который Федор решил определить на основании экспериментальных данных. В рамках этой линейной модели Федор сумел получить явный вид зависимости силы тока через лампочку от напряжения на ней.

1.4 Найдите явный вид зависимости силы тока через лампочку от напряжения на ней $I(U)$ в рамках линейной модели.

Полученная зависимость оказалась слишком громоздкой и трудно поддающейся анализу. Кроме того, у Федора возникла идея, как можно проверить применимость линейной модели к проведенному эксперименту.

Он сообразил, что можно легко рассчитать на основе результатов измерений мощность, выделяющуюся на лампочке P и ее сопротивление R и построить соответствующий график $R(P)$. Федор провел необходимые расчеты, построил график этой зависимости и... с сожалением, отверг линейную модель!

1.5 Найдите явный вид зависимости сопротивления лампочки от выделяющейся на ней мощности $R(P)$. **1.6** Проведите необходимые численные расчеты и постройте график зависимости $R(P)$ и кратко поясните, почему Федор отверг линейную модель.

Примечания. Результаты расчетов занесите в Таблицу 2 листов ответов. не забудьте подписать столбцы таблицы. Достаточно провести расчеты для половины точек, только выбирайте их разумно. График постройте на соответствующем бланке Листов ответов. Для дальнейшего анализа Федор, тем не менее, решил оценить максимальную температуру нити накаливания в своем эксперименте.

1.7 Оцените максимальную температуру нити накаливания на основании линейной модели.

Часть 2. Строгая теоретическая модель

После продолжительных размышлений Федор решил, что основной недостаток линейной модели заключается в выборе механизма тепловых потерь лампочки, который описывается формулой (3). Действительно, нить накала разогревается достаточно сильно, в результате чего она и светится. Следовательно, основным механизмом тепловых потерь является излучение света. Пришлось опять обратиться к справочникам. В результате «рысканий» по Интернету Федор решил использовать следующие данные:

1) Мощность теплового излучения нагретых тел определяется формулой

$$P_{\text{изл.}} = AT^n \quad (4)$$

где T - абсолютная температура тела, A - некоторый постоянный коэффициент, n - целое число.

2) Абсолютная температура T и электрическое сопротивление вольфрамовой нити в достаточно широком диапазоне температур связаны соотношением

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\frac{4}{5}} \quad (5)$$

здесь R_0 - сопротивление нити при температуре T_0 .

2.1 Проведите необходимые расчеты и постройте график зависимости мощности потерь лампочки от абсолютной температуры $P(T)$.

*Примечания. Не забудьте привести все формулы, которые Вы использовали в ходе расчетов. Результаты расчетов занесите в Таблицу 2 Листов ответов. Достаточно провести расчеты для половины точек, только выбирайте их разумно. Можете построить график зависимости $P(T)$ в относительных единицах (не забудьте указать каких). График постройте на бланке Листов ответов.

2.2 Используя любой метод (строгого расчета, подбора, угадывания – но с обоснованием найденного значения) определите показатель степени в формуле (5).

2.3 Найдите максимальную температуру нити накаливания лампочки в этом эксперименте.



Решение

Задание 2. Изучение лампочки накаливания (Решение)

Часть 1. Вольтамперная характеристика лампочки.

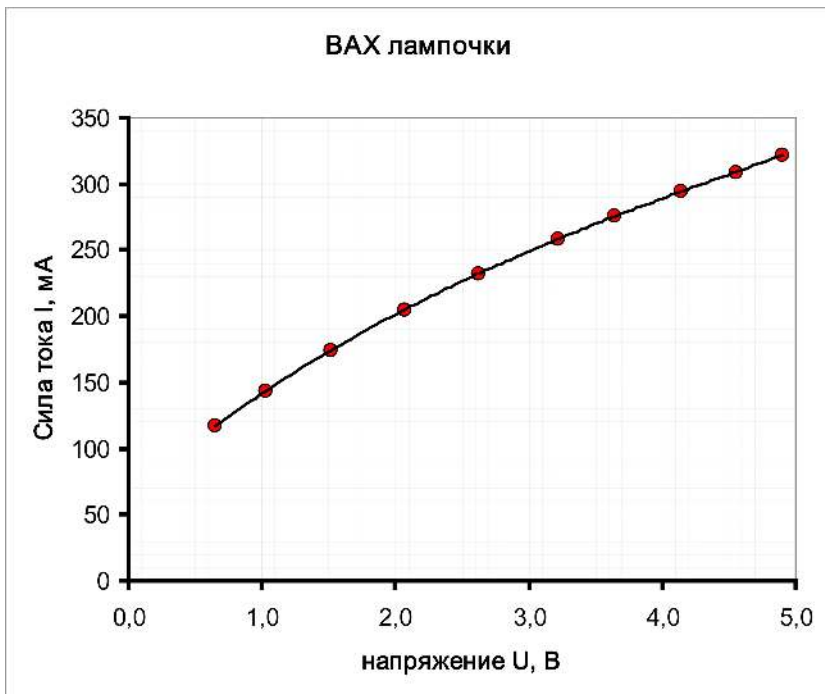
1.1 Для построения графика необходимо рассчитать значения сил токов через лампочку при известных напряжениях по формуле

$$I = \frac{U}{R_0}. \quad (1)$$

Результаты расчетов приведены в Таблице 1, рядом приведен необходимый график.

Таблица 1.

U, В	U ₀ , мВ	I, мА
0,65	72,6	
1,03	88,7	
1,51	108,1	
2,07	126,9	
2,62	143,9	
3,22	160,3	
3,64	170,9	
4,14	182,1	
4,55	191,3	
4,90	199,7	



1.2 Так как лампочки одинаковые, то напряжения на них также будут одинаковыми и равными

$$U_x = \frac{U_1}{3} = 1,5\text{В} \quad (2)$$

По графику ВАХ, находим, что сила тока (одинаковая для всех лампочек) равна

$$I_x = 174 \text{ мА} \quad (3)$$

Следовательно, мощность в этой цепи будет равна

$$P_1 = U_1 I_x = 0,26\text{Вт}. \quad (4)$$

1.3 При параллельном соединении напряжения на всех лампочках будет равно напряжению источника $U_1 = 4,5\text{В}$. По графику ВАХ находим, что сила тока через каждую лампочку равна

$$I_y = 310 \text{ мА} \quad (5)$$

Следовательно, мощность цепи будет равна

$$P_2 = 3U_1 I_y = 4,2\text{Вт}. \quad (6)$$

1.4 Для расчета ВАХ горячей лампочки используем закон Ома для участка цепи с учетом зависимости сопротивления от температуры:

$$I = \frac{U}{R_0(1 + \alpha\Delta t)}. \quad (7)$$

Здесь $\Delta t = t - t_0$ - разность между температурой нити и комнатной температурой. В этом уравнении не известна разность температур. Для получения системы уравнений воспользуемся законом теплоотдачи

$$P = \beta \Delta t \quad (8)$$

В условиях теплового равновесия, когда температура нити остается постоянной, мощность теплоты, выделяющейся при прохождении электрического тока, равна мощности теплоты, уходящей в окружающую среду. Мощность выделяющейся теплоты определяется законом Джоуля – Ленца:

$$P = UI \quad (9)$$

Из формул (2)-(3) выразим

$$\beta \Delta t = UI \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{UI}{\beta} \quad (10)$$

и подставим в формулу (1):

$$I = \frac{U}{R_0(1 + \alpha \Delta t)} = \frac{U}{R_0 \left(1 + \frac{\alpha UI}{\beta}\right)}. \quad (11)$$

Мы получили уравнение, связывающее между собой силу тока и напряжение на лампочке. Это квадратное уравнение, которое можно решить аналитически:

$$I = \frac{U}{R_0 \left(1 + \frac{\alpha UI}{\beta}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} UI^2 + I - \frac{U}{R_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{-1 \pm \sqrt{\left(\frac{U}{R_0}\right)^2 + 4 \frac{\alpha}{\beta R} \frac{U}{R_0}}}{2 \frac{\alpha}{\beta} U}. \quad (12)$$

Физический смысл имеет положительный корень этого уравнения. Поэтому зависимость силы тока от напряжения задается функцией:

$$I = \frac{\sqrt{\left(\frac{U}{R_0}\right)^2 + 4 \frac{\alpha}{\beta R} \frac{U}{R_0}} - 1}{2 \frac{\alpha}{\beta} U}. \quad (13)$$

1.5 Внимательно посмотрим на уравнение (5) и обратим внимание, что его можно представить в виде

$$I = \frac{U}{R_0(1 + \alpha \Delta t)} = \frac{U}{R_0 \left(1 + \frac{\alpha UI}{\beta}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{I} = R_0 \left(1 + \frac{\alpha UI}{\beta}\right). \quad (6)$$

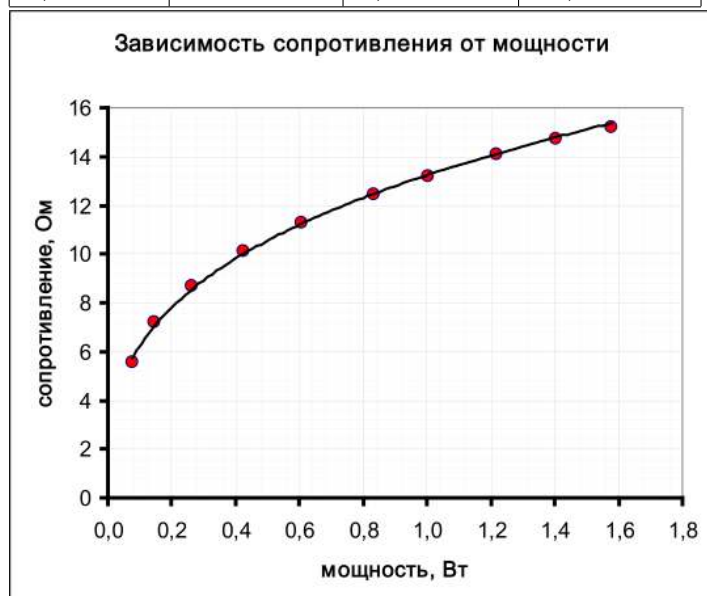
Входящие в него комбинации силы тока и напряжения имеют наглядный физический смысл: $\frac{U}{I} = R$ - сопротивление нити горячей нити накала; $UI = P$ - мощность тока через лампочку. Итак, зависимость сопротивления лампочки от выделяющейся мощности имеет линейный характер:

$$R = R_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} P\right). \quad (7)$$

1.6 Таким образом, по заданным значениям напряжения и силы тока необходимо рассчитать мощность в цепи и сопротивление нити накала по формулам (7). После чего можно построить требуемый график. Результаты расчетов приведены в Таблице 1 и на графике

Таблица 1.

U, В	**I, мА**	**P, Вт**	**R, Ом**
0,65	117	0,076	5,55
1,03	143	0,147	7,20
1,51	174	0,264	8,68
2,07	205	0,424	10,1
2,62	232	0,608	11,3
3,22	259	0,833	12,5
3,64	276	1,003	13,2
4,14	294	1,216	14,1
4,55	309	1,404	14,7
4,90	322	1,578	15,2



Расчеты показали, что данная зависимость сильно нелинейная – поэтому линейная модель должна быть отвергнута.

1.7 Несмотря на то, что линейная модель оказалась не пригодной для описания результатов эксперимента, для оценки температуры нити можно воспользоваться зависимостью сопротивления от температуры

$$R = R_0(1 + \alpha(t - t_0)) \quad (8)$$

Максимальное сопротивление лампочки равно $R = 15,2 \text{ Ом}$, тогда

$$t - t_0 = \frac{R - R_0}{\alpha R_0} \quad (9)$$

Подставляя численные значения находим, что максимальная температура нити накаливания равна

$$t = t_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = 23^\circ + \frac{15,2 - 1,9}{5,0 \cdot 10^{-3} \cdot 1,9} \approx 1400^\circ \text{C} \quad (10)$$

Часть 2.

2.1 Для построения графика зависимости мощности потерь от температуры необходимо рассчитать значения температур (мощности уже подсчитаны). Для расчета температур следует воспользоваться приведенной зависимостью между сопротивлением и температурой

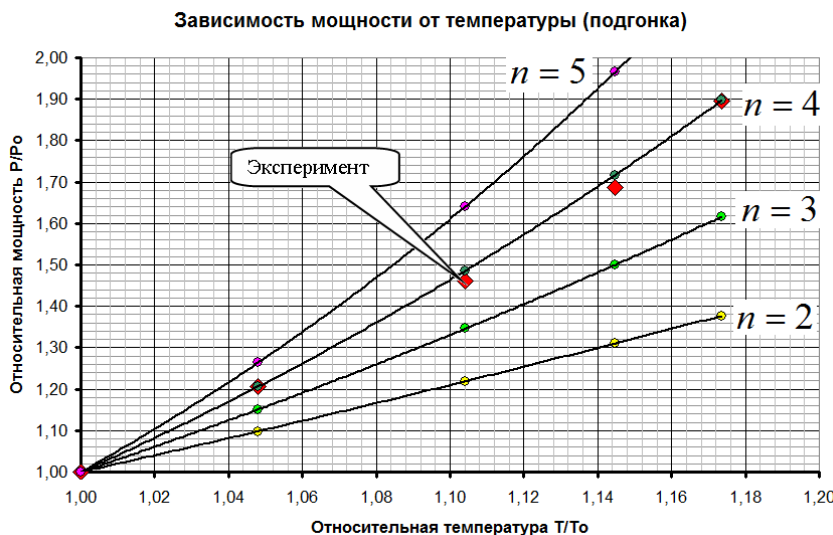
$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\frac{4}{5}} \quad (13)$$

Так как авторы задачи фактически построить график в относительных единицах, то можно рассчитать отношения $\frac{T}{T_0}$ (по формуле (13)) и $\frac{P}{P_0}$. Причем в качестве «нулевой точки» можно выбрать любую из известных точек. Так как при повышении температуры вклад излучения в общие потери становится все более преобладающим, то разумно взять точки с максимальными значениями сил токов и напряжений. Поэтому в качестве «нулевой точки» выберем значения при $U = 3,22\text{В}$. Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 2.

$U, \text{В}$	$I, \text{мА}$	$P, \text{Вт}$	$R, \text{кОм}$	$\left(\frac{T}{T_0}\right)$	$\left(\frac{P}{P_0}\right)$	$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2$	$\left(\frac{T}{T_0}\right)^3$	$\left(\frac{T}{T_0}\right)^4$	$\left(\frac{T}{T_0}\right)^5$
0,65	117	0,076	5,55						
1,03	143	0,147	7,20						
1,51	174	0,264	8,68						
2,07	205	0,424	10,1						
2,62	232	0,608	11,3						
3,22	259	0,833	12,5	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
3,64	276	1,003	13,2	1,05	1,21	1,10	1,15	1,21	1,26
4,14	294	1,216	14,1	1,10	1,46	1,22	1,35	1,49	1,64
4,55	309	1,404	14,7	1,14	1,69	1,31	1,50	1,72	1,97
4,90	322	1,578	15,2	1,17	1,90	1,38	1,62	1,90	2,23

График показан на рисунке ниже: экспериментальные точки отмечены большими красными ромбами. Для определения показателя степени (указано, что она целая) можно вычислить значения величины $\left(\frac{T}{T_0}\right)^n$ для нескольких значений n (в Таблице 2 $n = 2, 3, 4, 5$). Для наглядности эти точки нанесены на график.



Проведенные расчеты показывают, что экспериментальные точки очень близко ложатся на кривую, соответствующую $n = 4$.

Таким образом, ответ однозначен: показатель степени в зависимости мощности излучения от температуры равен

$$n = 4 \quad (14)$$

2.3 Максимальную температуру нити накаливания можно выразить и рассчитать с помощью формулы (13), используя данные для комнатной температуры

$$T = T_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\frac{4}{5}} = (273 + 23) \left(\frac{15,2}{1,9} \right)^{\frac{4}{5}} = 1560 \text{ K} \quad (15)$$

Переходя в привычную шкалу Цельсия, получаем:

$$t_{\max} \text{ } ^\circ\text{C} = T - 273 \approx 1300 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (16)$$

Полученный результат незначительно отличается от полученного в рамках линейной модели. Следовательно, основная причина неприменимости линейной модели действительно заключается в том, что основной механизм потерь – тепловое излучение нити накаливания.