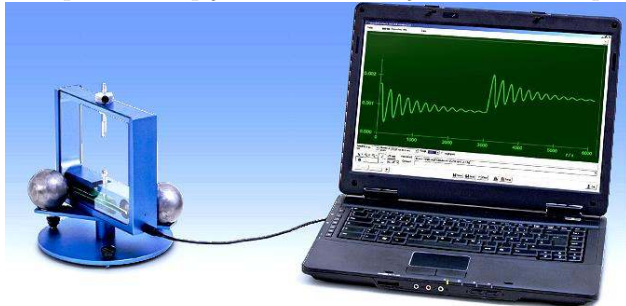


красивое

Условие

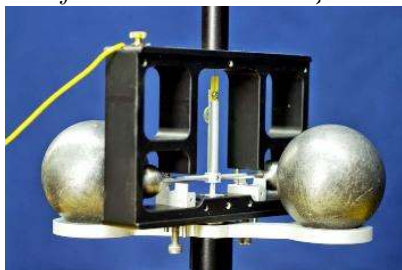
Задание 11-1. Опыт Кавендиша на современном оборудовании

Производство приборов и оборудования для учебных целей в настоящее время является прибыльным делом. Широко известна германская фирма ZV Scientific, производящая «красивое» и дорогое оборудование для учебных лабораторий.



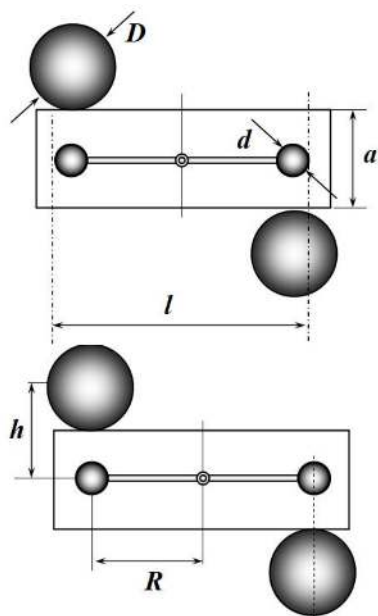
В данном задании Вам необходимо проанализировать результаты измерений гравитационной постоянной на установке, разработанной этой фирмой. Приведенные данные взяты из каталога приборов этой фирмы, имеющего, в том числе и рекламный характер.

На фото показан общий вид этой установки.



Основным ее элементом (как и в опытах самого Г.Кавендиша) являются чувствительные крутильные весы.

Их вид показан на следующей фотографии. На тонкой упругой вольфрамовой нити подвешено легкое коромысло, на концах которого закреплены два небольших свинцовых шарика. Коромысло может совершать малые крутильные колебания. Чувствительный датчик регистрирует угол поворота коромысла (с разрешающей способностью 25 микрорадиан) и выводит результаты измерений на экран компьютера, на котором отражается зависимость угла поворота коромысла от времени. Эта система помещена в стеклянный корпус (на фото он снят), чтобы избежать влияния потоков воздуха. В положении равновесия коромысло располагается примерно вдоль оси корпуса по его средней линии. Снаружи корпуса на вращающейся подставке расположены два больших свинцовых шара. Во время измерений эти шары касаются стенок стеклянного корпуса. С помощью вращательного механизма эти шары можно приближать к корпусу в двух положениях – с одной и, с другой стороны.



Согласно техническому описанию прибора, его параметры имеют следующие значения:

Массы больших шаров $M = 1,038\text{кг}$.

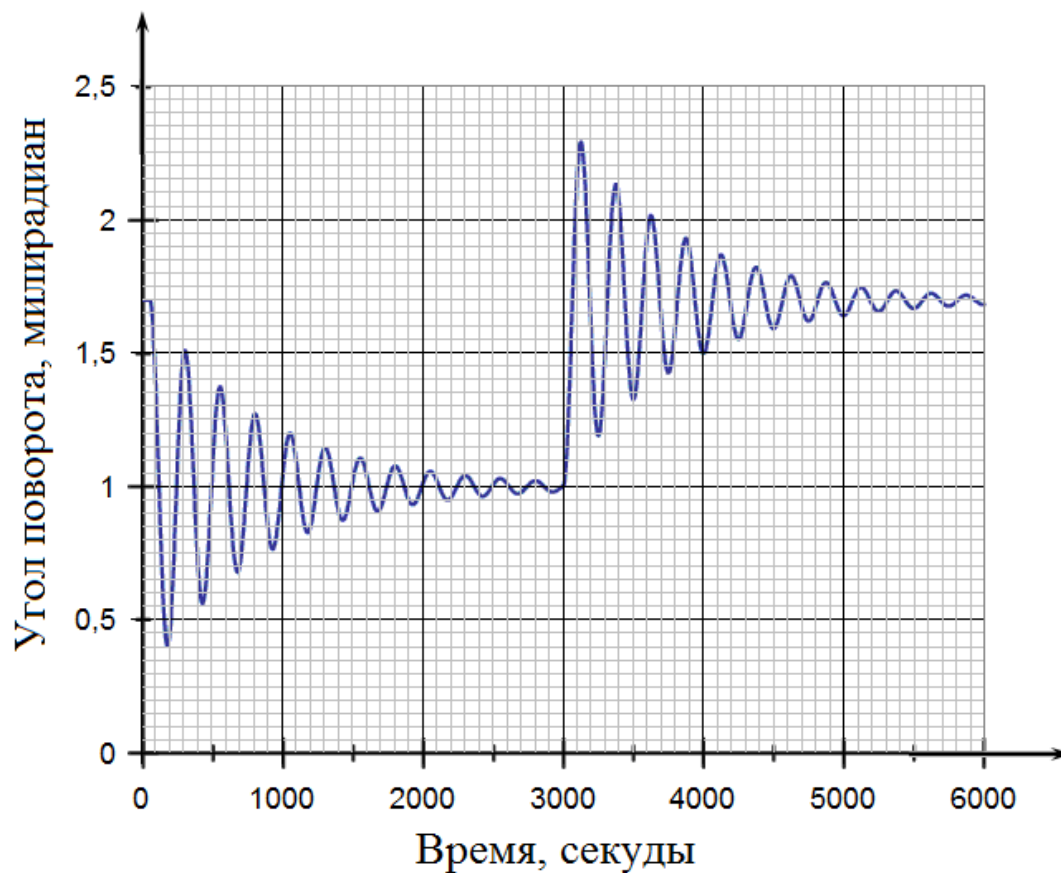
Массы малых шаров $m = 0,0145\text{кг}$.

Массой коромысла весов можно пренебречь

Геометрические параметры:

Диаметры больших шаров $D = 0,0562\text{м}$.

Диаметры малых шаров $d = 0,0134\text{м}$.



Расстояние между стенками стеклянного корпуса $a = 0,0351\text{м}$

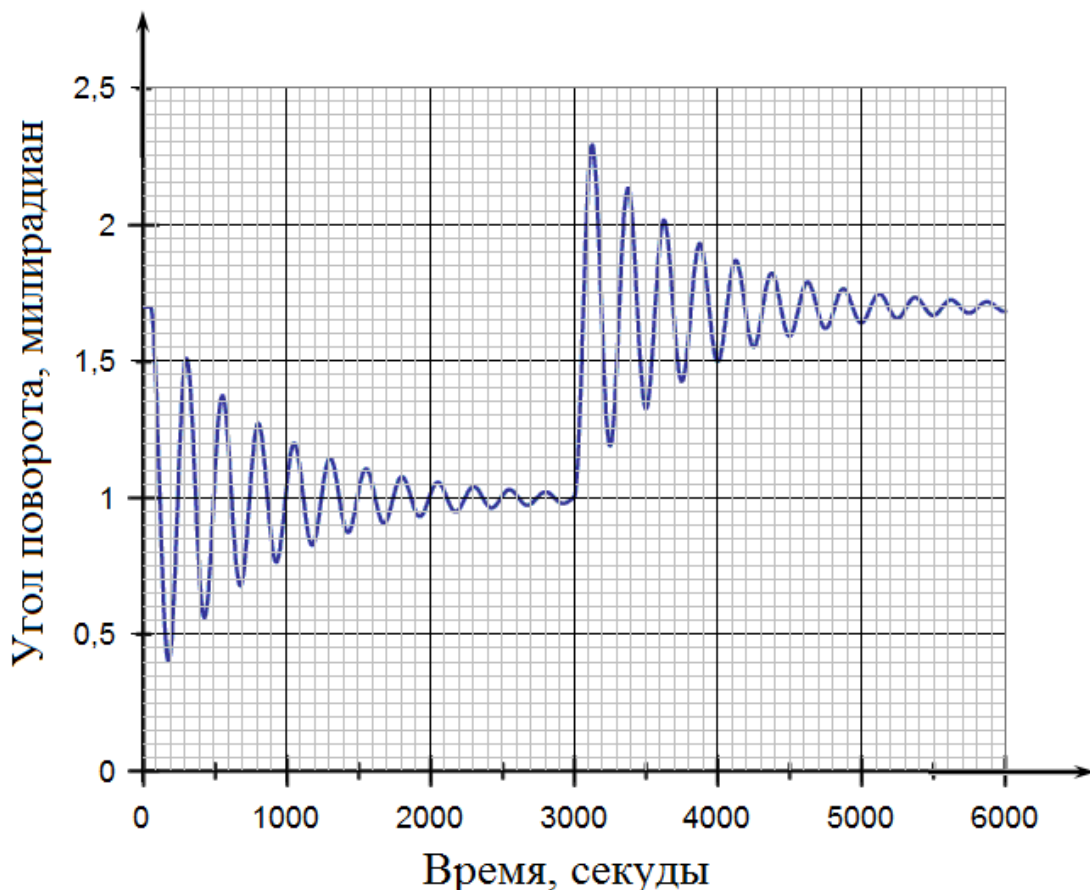
Расстояние между внешними границами малых шаров на коромысле $l = 0,1468\text{м}$.

В своем решении используйте следующие геометрические величины:

расстояние от оси подвеса до центра малого шара R

расстояние между центрами большого и малого шаров при касании большого шара стенки стеклянного корпуса h

Вычислите численные значения этих величин и далее используйте их в своих расчетах. Используйте приведенные здесь обозначения.



В начале эксперимента большие шары располагались на максимальном удалении от коромысла. Затем их придвинули вплотную к стенкам корпуса. Через 5 минут после начала измерений держатель больших шаров повернули примерно на 180 градусов, приблизив их вплотную к стенкам корпуса. При этом шары оказались с другой стороны относительно малых шаров.

На графике приведена полученная зависимость угла поворота коромысла от времени. Не удивляйтесь: время измерения составило в общей сложности 10 минут. Для справки: в опытах Кавендиша период колебаний коромысла был примерно равен 15 минутам. Углы отклонения приведены в миллирадианах - тысячной доле радиана.

Используя приведенные данные, определите с максимальной точностью значение гравитационной постоянной.

Несмотря на то, что Вам предоставлена полная свобода действий, в изложении своего решения будьте последовательны и немногословны. Жюри ждет от Вас научный трактат на заданную тему.

Получите расчетные формулы (их вывод сопровождайте рисунками, указывайте смысл использованных Вами обозначений, аргументируйте сделанные приближения); укажите ка-

кие физические величины должны быть получены из приведенного графика; укажите, каким способом вы «извлекли» эти величины, приведите их численные значения, приведите окончательный результат (хотя, надеемся, что он Вам известен). Укажите основные неучтенные факторы, которые могли повлиять на окончательный результат.

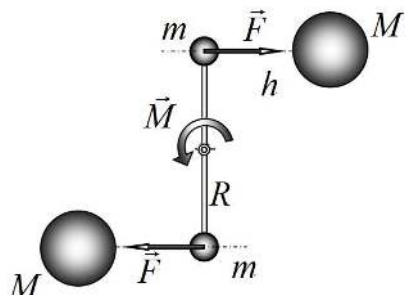
Помните, что надо использовать всю имеющуюся информацию, не желательно получать значения по одной экспериментальной точке! При необходимости может использовать лист разграфленной бумаги для построения графиков.

Четко выделяйте основные этапы работы и важные промежуточные результаты. Допускается проведение промежуточных расчетов и их дальнейшее использование.

Решение

Задание 11-1. Опыт Кавендиша на современном оборудовании

Проведем расчет геометрических параметров, необходимых для анализа результатов измерений:



$$h = \frac{a+D}{2} = 4,565 \cdot 10^{-2} \text{ м.} \quad (1)$$

$$R = \frac{l-d}{2} = 6,67 \cdot 10^{-2} \text{ м.} \quad (2)$$

При подведении тяжелых шаров к коромыслу весов на малые шарики начинает действовать сила гравитационного притяжения, равная

$$F = G \frac{mM}{h^2} \quad (3).$$

Так смещение шариков коромысла крайне мало, то можно пренебречь изменением расстояния между взаимодействующими шарами, т.е. в формуле (3) можно считать величину h постоянной. Эти силы создают дополнительный момент гравитационных сил, действующих на коромысло

$$M_g = 2F_g R = 2G \frac{mM}{h^2} R. \quad (4)$$

который уравнивается возникающим моментом сил упругости нити подвеса

$$M_e = K(\Delta\phi)_{A,B}. \quad (5)$$

здесь $(\Delta\phi)_{A,B} = |\bar{\phi}_{A,B} - \phi_0|$ - отклонение равновесного положения коромысла $\bar{\phi}_{A,B}$ от положения, соответствующего недеформированной нити ϕ_0 .

В положении равновесия эти моменты равны, следовательно

$$M_g = 2F_g R = 2G \frac{mM}{h^2} R = K(\Delta\phi)_{A,B}. \quad (6)$$

где K - модуль кручения нити. Однако, положение равновесия при недеформированной нити неизвестно. Может быть измерена величина суммарного смещения положения равновесия при изменении положения больших шаров $\Delta\phi = |\bar{\phi}_A - \bar{\phi}_B|$, которая в два раза больше, чем $(\Delta\phi)_{A,B} = |\bar{\phi}_{A,B} - \phi_0| = \frac{\Delta\phi}{2}$.

С учетом этого обстоятельства, из этого равенства следует формула для расчета гравитационной постоянной

$$G = \frac{h^2}{4mMR} K \Delta\phi. \quad (7)$$

Угол закручивания нити в положении равновесия можно определить из представленного графика. Но в формулу входит неизвестный модуль кручения нити K . Эта же характеристика

нити определяет период крутильных колебаний коромысла с шариками. Период свободных колебаний можно определить из имеющегося графика. Получим формулу для периода этих колебаний. Для чего запишем закон сохранения энергии при таких колебаниях

$$2\frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{K\phi^2}{2} = E. \quad (8)$$

Это есть уравнение гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{K}}. \quad (9)$$

Таким образом, нужный модуль кручения выражается через период крутильных колебаний

$$K = \frac{8\pi^2 mR^2}{T^2}. \quad (10)$$

Подставим его значение в формулу для определения гравитационной постоянной

$$G = \frac{h^2}{4mMR} K \Delta\phi = \frac{h^2}{4mMR} \Delta\phi \frac{8\pi^2 mR^2}{T^2} = \frac{2\pi^2 R h^2}{MT^2} \Delta\phi. \quad (11)$$

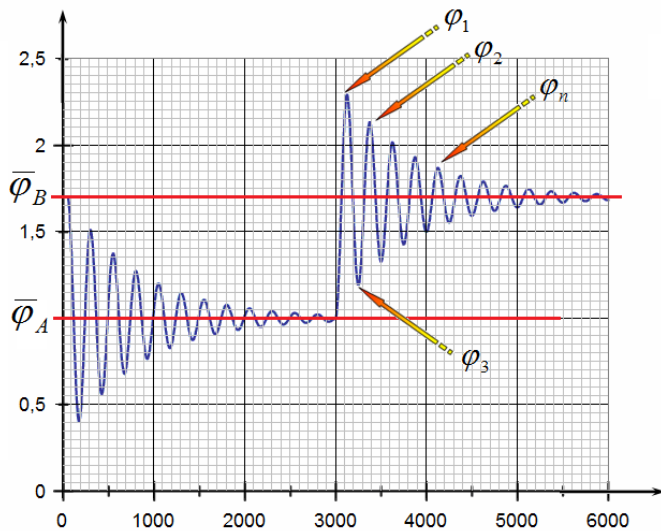
Тем самым, мы получили формулу для расчета гравитационной постоянной, в которую входят только измеряемые величины

$$G = \frac{2\pi^2 R h^2}{MT^2} \Delta\phi \approx 2,96 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}. \quad (12)$$

что ниже табличного значения.

Помимо геометрических размеров из полученных результатов следует определить с максимальной точностью две величины: $\Delta\phi$ - смещение положения равновесия, при изменении положения больших шаров; T - период колебаний.

Рассмотрим возможности их определения.



1. Положения равновесия.

Способ 1. Просто по графику снять значения углов, к которым стремятся графики затухающих колебаний.

$$\Delta\phi \approx 0,35 \text{ рад}$$

Способ 2. По трем точкам (метод Кавендиша). Г. Кавендиш использовал следующую формулу (логически понятную)

$$\bar{\phi} = \frac{\phi_1 + \phi_3 + \phi_2}{2}. \quad (13)$$

Способ 3. По трем точкам с учетом затухания.

Функция, описывающая затухающие колебания, имеет вид

$$\phi(t) = \bar{\phi} + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos \omega t. \quad (14)$$

Для точек максимального отклонения можно записать

$$(\phi_n - \bar{\phi}) = k(\phi_{n-1} - \bar{\phi}) \quad (15)$$

где k - коэффициент затухания за половину периода колебаний.

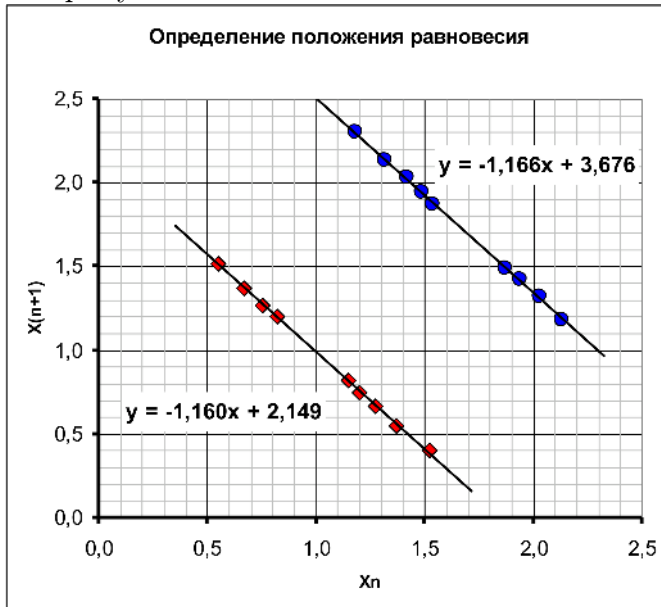
Тогда для трех первых точек получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (\phi_2 - \bar{\phi}) = -k(\phi_1 - \bar{\phi}) \\ (\phi_3 - \bar{\phi}) = -k(\phi_2 - \bar{\phi}) \end{cases} \quad (16)$$

с двумя неизвестными величинами. Решая ее относительно α_0 , получим

$$\bar{\phi} = \frac{\phi_2^2 - \phi_1\phi_3}{2\phi_2 - (\phi_1 + \phi_3)}. \quad (17)$$

Способ 4. По «всем точкам»: применить формулу рекуррентную формулу(16) ко всем точкам экстремумов



$$(\phi_{n+1} - \bar{\phi}) = -k(\phi_n - \bar{\phi}) \quad (18)$$

Из которой следует, что

$$\phi_{n+1} = -k\phi_n + (1 + k\bar{\phi}). \quad (19)$$

Эта зависимость может быть использована для определения величин k и равновесного положения. В таблице и на графиках показаны эти зависимости для двух положений.

Положение А	Положение В				
n	ϕ_n	ϕ_{n+1}	n	ϕ_n	ϕ_{n+1}
1	0,4		1	2,30	
2	1,52	0,4	2	1,18	2,3
3	0,55	1,52	3	2,13	1,18
4	1,37	0,55	4	1,32	2,13
5	0,67	1,37	5	2,03	1,32
6	1,27	0,67	6	1,42	2,03
7	0,75	1,27	7	1,94	1,42
8	1,20	0,75	8	1,49	1,94
9	0,82	1,20	9	1,87	1,49
10	1,15	0,82	10	1,54	1,87
		1,15			1,54

По коэффициентам этих графиков можно рассчитать значения положений равновесия:

$$\phi_A = 0,995 \quad \phi_B = 1,687. \quad (18)$$

Что крайне мало отличается от значений, снятых «на глаз».

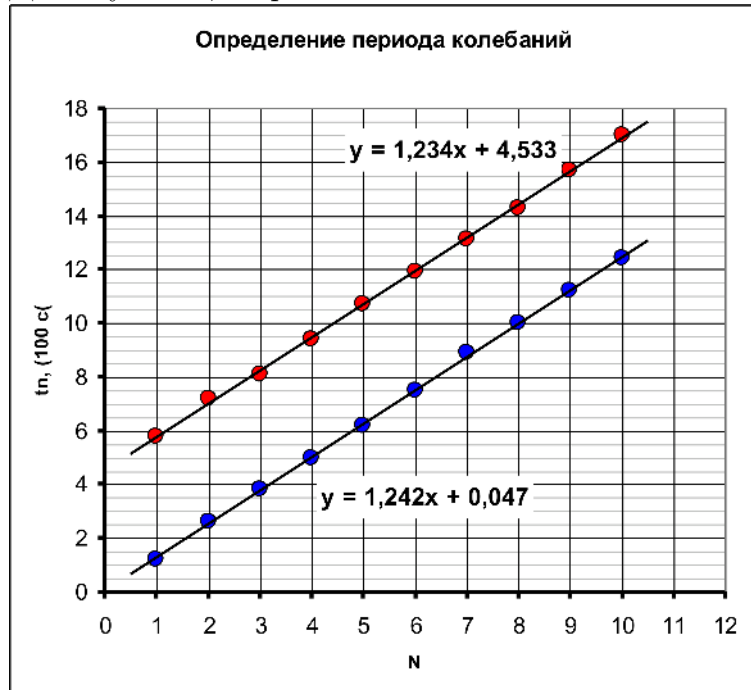
2. Определение периода колебаний.

1 Способ. Просто снять значения времен нескольких колебаний. Получается значение периода $T = 250\text{с}$. (19)

2 способ. Усреднить периоды для разных положений равновесия.

3 способ. Провести усреднение «по всем точкам»: снять значения «нулей» и построить зависимость этих времен от номера. Результаты в таблице и на графике (результаты в «клеточках» приведенного рисунка, одна клеточка – 100с).

Для случая В, к временам



прибавлено произвольное число 5, чтобы графики не перекрывались)

Таблица 2.

А	В			
n	t_n	t_n	n	$t_n + 5$
1	1,20	0,8	1	5,8
2	2,60	2,2	2	7,2
3	3,80	3,1	3	8,1
4	5,00	4,4	4	9,4
5	6,20	5,7	5	10,7
6	7,50	6,9	6	11,9
7	8,90	8,1	7	13,1
8	10,00	9,3	8	14,3
9	11,20	10,7	9	15,7
10	12,40	12,0	10	17,0

По результатам измерений и последующему усреднению получено значение $T = 248\text{с}$ (20)

Учет изменения периода вследствие затухания.

Известно, что частота затухающих колебаний отличается от частоты свободных колебаний:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}. \quad (21)$$

Откуда следует, что период колебаний, полученный в результате расчетов (9), должен определяться из формулы

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{\tau^2}. \quad (22)$$

Проведенная обработка позволяет учесть и эту поправку.