

Условие

Задание 11-2. Камера Вильсона.

Листы ответов к данной задаче не прилагаются!

Камера Вильсона - замечательный прибор для исследования заряженных частиц, который сыграл и до сих пор продолжает играть значительную роль в ядерной физике и физике элементарных частиц. Принцип работы камеры прост и понятен: в сосуде создается пересыщенный пар, парциальное давление которого превышает давление насыщенных паров. Такая система находится в метастабильном состоянии. Пролетающая заряженная частица на своем пути создает цепочку ионов, которые являются центрами конденсации. На них образуются микроскопические капельки воды, отмечающие траекторию пролетающей частицы, которую можно сфотографировать. Аналогичные процессы происходят и при образовании облаков. Однако, до настоящего времени не все понятно в этом процессе, особенно на его начальной стадии. Этим проблемам и посвящено это задание.

Задача разработана на основе статьи

Н.Н. Гупта, С.К. Гош. Камера Вильсона и ее применение в физике.

УФН, 1947 г., т. XXXI, вып. 4

и книги

Физика облаков, под редакцией А.Х. Хргиана,
Ленинград, 1961 г.

Справочные материалы.

Плотность воды	ρ	$1,0 \cdot 10^3$	кг/м ³
Удельная теплота испарения воды	L	$2,30 \cdot 10^6$	Дж/м ³
Удельная теплоемкость воды	c	$4,20 \cdot 10^3$	Дж/(кг К)
Поверхностное натяжение воды	σ	$7,3 \cdot 10^{-2}$	Н/м
Молярная масса воды	M	$1,8 \cdot 10^{-2}$	кг/моль
Постоянная Авогадро	N_A	$6,0 \cdot 10^{23}$	1/моль
Универсальная газовая постоянная	R	8.31	Дж/(моль К)
Заряд электрона	e	$1,6 \cdot 10^{-19}$	Кл
Электрическая постоянная	ε_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$	Ф/м

Характеристики воды считать постоянными, не зависящими от температуры.

В конце задания приведена таблица зависимости давления насыщенных паров воды от температуры

Свободная поверхность жидкости обладает энергией, равной $U = \sigma S$, где S - площадь поверхности, σ - коэффициент поверхностного натяжения.

В задаче будем рассматривать камеру, рабочей средой которой является воздух с водяными парами, близкими к насыщению

Часть 1. Проблема образования зародышей капель.

Одной из проблем теории образования капель является выяснения появления так называемых зародышей капель в чистой без пыли среде. Оказывается, что существует некоторый **критический радиус капли**, после превышения которого она начинает расти, зародышевые капли меньшего радиуса испаряются.

1.1 Покажите, что зависимость потенциальной энергии капли от ее радиуса может быть представлена в виде

$$U(r) = -ar^3 + br^2. \quad (1)$$

где a и b некоторые положительные постоянные величины. Укажите физический смысл каждого слагаемого.

1.2 Используя характеристики воды, предложите оценки коэффициентов в формуле (1).

1.3 При каком условии, накладываемом на функцию $U(r)$, капля может расти.

1.4 Используя функцию (1), оцените критический радиус капли

Полученная оценка критического радиуса оказывается несколько завышенной, что связано с грубой оценкой коэффициентов функции (1).

Поэтому далее считайте критический радиус капли равным $r_{cr} = 10\text{нм}$.

1.5 Рассчитайте число молекул воды, в капле воды радиуса .

Оценки показывают, что даже уже на таких пространственных масштабах каплю можно считать сплошной средой, потерявшей «атомарную» структуру

1.6 Получите точную формулу для электрической энергии заряженного проводящего шара радиуса R , несущего электрический заряд q .

Рассмотрим зародышевую каплю, образовавшуюся на однозарядовом (т.е. ее заряд равен заряду электрона) ионе. Можно считать, что капля является проводящим шариком.

1.7 Добавьте, в функцию (1) слагаемое, учитывающее электрическую энергию капли. Покажите на качественном уровне (лучше это сделать графически), что наличие этой энергии, может приводить к уменьшению критического радиуса капли. Численные оценки в этом пункте не требуются.

Часть 2. Внешние условия

Полученная в Части 1 оценка критического радиуса оказывается несколько завышенной, что связано с грубой оценкой коэффициентов функции (1). Поэтому далее считайте критический радиус капли равным $r_{cr} = 10\text{нм}$.

В Части 1 были оценены условия, при которых капля может расти. Однако для ее роста необходимо, чтобы молекулы воды, находящиеся в газообразном состоянии, постоянно подходили к поверхности капли.

Известно, это было установлено еще У. Томсоном (лордом Кельвиным), что давление насыщенных паров вблизи искривленной поверхности жидкости отличается от давления насыщенных паров вблизи плоской поверхности, причем у выпуклых поверхностей (как у капли) оно больше, а у вогнутых (как у мениска) оно меньше.

У. Томсон получил формулу (сейчас ее выводят на первом курсе физического факультета), описывающую это давление

$$\ln \frac{P_r}{P_\infty} = \frac{2\sigma}{r} \frac{M}{RT\rho} \quad (2)$$

где P_r - давление насыщенного пара у поверхности капли радиуса r , P_∞ - давление насыщенного пара у плоской границы (именно его приводят в справочниках), M - молярная масса воды, ρ - ее плотность, R - универсальная газовая постоянная, σ - поверхностное натяжение воды.

2.1 Рассчитайте избыточное давление насыщенного пара у капелек указанного критического радиуса $r_{cr} = 10\text{нм}$ при температуре 20°C .

2.2 Пусть влажный воздух с насыщенным паром находится в камере Вильсона при температуре 20°C . Оцените, на сколько градусов надо резко (например, путем адиабатического расширения) охладить этот воздух, чтобы начался процесс роста капель радиуса $r_{cr} = 10\text{нм}$.

Оцените влажность воздуха в этом случае

Можно заметить, что в формулу Томсона (2) входит Лапласовское давление под искривленной поверхностью. Это наблюдения может помочь проанализировать влияние зарядка капли на избыточное давление пара у поверхности капли. Действительно, заряд капли уменьшает давление внутри нее, т.е. как бы уменьшает Лапласовское давление.

2.3 Используя формулу для поверхностной энергии поверхности воды, получите формулу для избыточного давления под искривленной поверхностью (формулу Лапласа)

2.4 Получите формулу для давления электрического поля на поверхность заряженного проводящего шара радиуса R , если его заряд равен q .

По-прежнему, рассматриваем капельку воду радиуса $r_{\text{ст}} = 10\text{ нм}$.

2.5 Рассчитайте, какой заряд надо сообщить этой капле (при температуре $20\text{ }^{\circ}\text{C}$), чтобы начался ее рост в атмосфере насыщенного пара (без прессыщения).

Зависимость давления насыщенных паров воды от температуры

(Взята из учебника физики для 10 класса)

$t, ^{\circ}\text{C}$	$p_{\text{н}}, \text{кПа}$	$p_{\text{н}}, \frac{\text{г}}{\text{м}^3}$	$t, ^{\circ}\text{C}$	$p_{\text{н}}, \text{кПа}$	$p_{\text{н}}, \frac{\text{г}}{\text{м}^3}$
-20	0,103	0,85	8	1,06	8,3
-18	0,125	1,05	10	1,228	9,4
-16	0,151	1,27	12	1,402	10,7
-14	0,181	1,51	14	1,598	12,1
-12	0,217	1,80	16	1,817	13,6
-10	0,260	2,14	18	2,063	15,4
-8	0,337	2,54	20	2,338	17,3
-6	0,368	2,99	22	2,643	19,4
-4	0,437	3,51	24	2,984	21,8
-2	0,517	4,13	26	3,361	24,4
0	0,611	4,84	28	3,780	27,2
2	0,705	5,60	30	4,242	30,3
4	0,813	6,40	40	7,37	51,2
6	0,934	7,3	50	12,3	83,0

Решение

Задание 11-2. Камера Вильсона. Решение.

Часть 1. Проблема образования зародышей капель.

1.1 В предложенной формуле для энергии капли

$$U(r) = -ar^3 + br^2 \quad (1)$$

Первое слагаемое имеет смысл объемной энергии – потенциальной энергии взаимодействия молекул воды. Второе слагаемое - поверхностная энергия.

1.2 Объемную энергию можно выразить через удельную теплоту испарения

$$ar^3 = L\rho V = \frac{4}{3}\pi r^3 L\rho \quad (2)$$

Отсюда следует, что

$$a = \frac{4}{3}\pi L\rho \approx 6,3 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}. \quad (3)$$

Второе слагаемое: поверхностную энергию следует выразить через поверхностное натяжение $br^2 = 4\pi r^2 \sigma \Rightarrow b = 4\pi \sigma \approx 0,92 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}. \quad (4)$

1.3 Рост капли сможет начаться в той области радиусов капли, в которой потенциальная энергия убывает с ростом радиуса капли.

1.4 Функция (1) имеет точку максимума. Следовательно, критический радиус соответствует значению точки максимума. Вычисляя производную от функции (1) и приравнявая ее к нулю, легко получить значение критического радиуса

$$r_{cr} = \frac{2b}{3a} \approx 6,4 \cdot 10^{-11} \text{ м.} \quad (5)$$

Явно заниженное значение, по-видимому, слишком большая доля молекул находится на поверхности капли.

1.5 Число молекул в капле рассчитывается по очевидной формуле

$$N = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{M} N_A \approx 1,4 \cdot 10^5. \quad (6)$$

1.6 Энергию электрического поля капли следует рассчитывать по формуле

$$U = \frac{1}{2} q \phi = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (7)$$

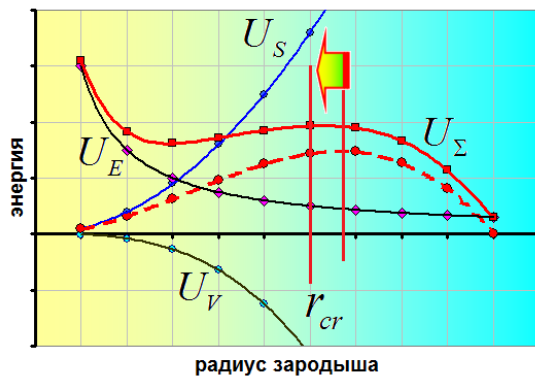
1.7 В потенциальную функцию следует добавить положительное слагаемое, равное энергии поля капли:

$$U(r) = -ar^3 + br^2 + \frac{c}{r}. \quad (8)$$

Где коэффициент c равен

$$\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{c}{r} \Rightarrow c = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}. \quad (9)$$

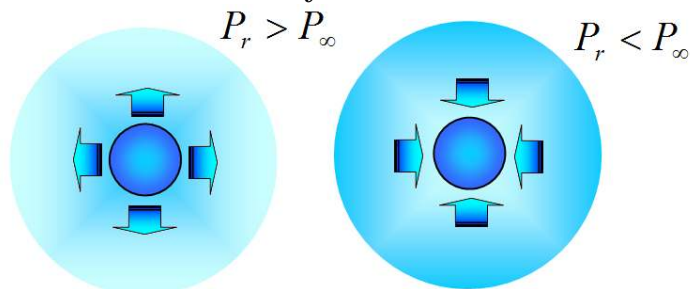
Графики энергий



Не сложно показать, что это может приводить к сдвигу максимума функции $U(r)$, что приводит к изменению критического радиуса капли.

Иллюстрация приведена на рисунке.

Часть 2. Внешние условия



Основная идея этой части задания: перенос молекул к капле осуществляется посредством диффузии. Поэтому капля будет расти, если концентрация молекул воды (следовательно, и парциальное давление водяных паров) у поверхности капли будет меньше, чем концентрация на большом удалении от капли!

2.1 Расчет давления насыщенных паров у поверхности капли дает:

$$\frac{P_r}{P_\infty} = \exp\left(\frac{2\sigma}{r} \frac{M}{RT\rho}\right) = k \approx 1,11. \quad (10)$$

При температуре 20°C

$$P_r = 2,33 \cdot 1,11 = 2,59 \text{ Па} \quad (11)$$

2.2 При резком понижении температуры парциальное давление водяного пара вдали от капли практически не изменится, поэтому надо понизить давление у поверхности капли. Заметим, что коэффициент k в формуле (10) очень слабо зависит от температуры, поэтому можно записать

$$p_{\infty}(t_1) = p_{\infty}(t_0) \quad (12)$$

Откуда находим, что

$$p_{\infty}(t_1) = \frac{p_{\infty}(t_0)}{k} = \frac{2,38}{1,11} \approx 2,1 \text{ кПа.} \quad (13)$$

По таблице давления насыщенных паров с помощью линейной интерполяции находим, что температура должна понизиться примерно на 1,5 градуса.

Из формулы (13) видно, что влажность воздуха при этом составит примерно 110%

2.3 Лапласовское давление задается формулой

$$p = \frac{2\sigma}{r}. \quad (14)$$

Эту формулу можно получить следующим образом:

Работа сил по увеличению площади поверхности равна изменению энергии, поэтому

$$P\Delta V = \sigma\Delta S, \quad \Delta V = 4\pi r^2\Delta r, \quad \Delta S = 8\pi r\Delta r$$

Откуда и следует формула (14).

2.4 Давление электрического поля на проводящую поверхность можно рассчитать по формуле

$$p = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2. \quad (15)$$

2.5 Приравнивая эти давления находим необходимый заряд капли

$$q \approx 2,0 \cdot 10^{-17} \text{ Кл.} \quad (16)$$