

Условие

Задание 11-3. Терморезисторы

В электротехнике используются приборы, которые называются терморезисторы, сопротивление которых достаточно сильно зависит от температуры. Если сопротивление такого резистора возрастает с ростом температуры, такой прибор называется терморезистором с положительной характеристикой (такой резистор мы будем обозначать на схемах знаком «+»). Если сопротивление прибора уменьшается с ростом температуры, то прибор называется терморезистором с отрицательной характеристикой (на схемах будем обозначать его со знаком «-»). Для реальных приборов зависимости сопротивления от температуры носят сложный и разнообразный характер. Но в данном задании эти зависимости будем приближенно описывать линейными функциями:

$$R = R_0(1 + \alpha t) \quad (1)$$

для положительной характеристики, и

$$R = R_0(1 - \alpha t) \quad (2)$$

для отрицательной характеристики.

Второй важной характеристикой является мощность теплоотдачи – количество теплоты, уходящей в окружающую среду в единицу времени. Будем считать, что мощность теплоотдачи пропорциональна температуре терморезистора

$$P = \beta t. \quad (3)$$

В формулах (1)-(3) t – есть разность между температурой терморезистора и температурой окружающей среды. Коэффициенты в формулах α, β, R_0 (1)-(3) положительные, считайте их известными. Во всех частях задания рассматривается области температур, при которых формулы (1) - (2) дают положительные значения сопротивлений:

от $t \rightarrow -\infty$ до $t = \frac{1}{\alpha}$ для терморезистора с отрицательной характеристикой;

от $t = -\frac{1}{\alpha}$ до $t \rightarrow +\infty$ для терморезистора с положительной характеристикой.

Теплоемкость каждого терморезистора равна C и не зависит от его температуры.

Считайте, что терморезистор с положительной характеристикой (1) перегорает только в том случае, когда его температура стремится к бесконечности $t \rightarrow \infty$. А терморезистор с отрицательной характеристикой (2), перегорает, если его температура стремится к $t \rightarrow \frac{1}{\alpha}$.

Если в цепи находится два терморезистора, то считайте, что обмен теплоты между ними не происходит.

Стационарным (установившимся) называется режим, в котором значения температур и сопротивлений терморезисторов перестают изменяться с течением времени.

Подсказка.

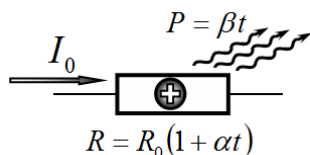
Решения каждой части задания рекомендуем начинать с записи уравнений, описывающих величины $\frac{\Delta t_{1,2}}{\Delta \tau}$ – изменения температур терморезисторов $t_{1,2}$ за малый промежуток времени $\Delta \tau$ (обозначайте время τ , чтобы не путать с температурой t). Для этого удобно ввести «относительные» сопротивления терморезисторов $r_{1,2} = \frac{R_{1,2}}{R_0}$ и перейти к уравнениям, описывающим изменения сопротивлений терморезисторов, которые можно привести к виду

$$a \frac{\Delta r_{1,2}}{\Delta \tau} = F_{1,2}(r_1, r_2, p). \quad (4)$$

где a – не существенный для данной задачи параметр, $F_{1,2}(r_1, r_2, p)$ – некоторые функции от переменных r_1, r_2 и от безразмерного параметра p , зависящего от параметров задачи $R_0, \alpha, \beta, U_0, I_0$. Для вашего удобства во всех частях задачи этот параметр будет указан.

Решать эти уравнения не следует, достаточно провести их качественный анализ и построить качественные графики требуемых зависимостей. Эти графики оцениваются по следующим критериям: начальные и предельные значения; характер зависимости – монотонность, возрастание-убывание; выпуклость – вогнутость

Все графики необходимо построить на подготовленных для вас бланках в Листах ответов. Используйте сделанную оцифровку осей координат (там, где она есть). Оси времени оцифровывать не надо. Вид построенных графиков должен быть обоснован формулами, графиками – простого угадывания недостаточно.



Часть 1. Один «положительный» терморезистор.

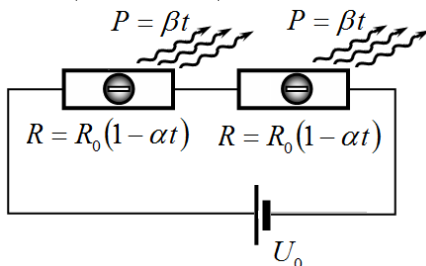
В данной части используйте безразмерный параметр $p = \frac{\alpha I_0^2 R_0}{\beta}$.

Терморезистор с положительной характеристикой включен в цепь, в которой поддерживается постоянная сила тока I_0 .

1.1 Определите максимальное значение силы тока I_0 , который может протекать через резистор без его перегорания.

1.2 Запишите уравнение вида (4), описывающее изменение относительного сопротивления резистора с течением времени. Укажите значение параметра a в данном уравнении.

1.3 На бланках в Листах ответов постройте схематические графики зависимости сопротивления терморезистора от времени при указанных значениях параметра p и различных начальных (при $\tau = 0$) значениях сопротивления r_0 .



Часть 2. Два «отрицательных» терморезистора

В этой части безразмерный параметр равен $p = \frac{\alpha U_0^2}{4\beta R_0}$.

Два одинаковых терморезистора с отрицательными характеристиками соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения U_0 .

2.1 Получите уравнения, описывающие изменения относительных сопротивлений резисторов. Приведите их к виду (4). Укажите значение параметра a в этих уравнениях.

2.2 Докажите, что возможны только такие установившиеся режимы, при которых сопротивления резисторов одинаковы $r_1 = r_2$.

Рассмотрим режим протекания тока, если в начальный момент сопротивления терморезисторов одинаковы и равны r_0 . В этом случае сопротивления резисторов могут изменяться с течением времени, но будут оставаться равными.

2.3 Определите, при каких значениях параметра p возможен установившийся режим протекания тока.

2.4 На бланках в Листах ответов постройте схематические графики зависимости сопротивления резисторов от времени при двух указанных значениях параметра p и различных начальных условиях.

2.5 Найдите максимальное значение напряжения источника $U_{0 \max}$ при которых терморезисторы не перегорают. Выразите эту величину через параметры R_0 , α , β .

2.6 Рассчитайте численные значения установившегося значения относительного сопротивле-

ния терморезисторов r при напряжении источника равном $U_0 = \frac{U_{0\max}}{2}$ и при $U_0 = 0,50 \cdot U_{0\max}$. При совместном рассмотрении двух функций от времени (в нашем случае – это зависимости сопротивлений от времени $r_1(t)$ и $r_2(t)$) наглядное представление о поведении этих функций дает, так называемая фазовая диаграмма. Для этого строится диаграмма, по осям которой откладывают значения одной и другой функции в некоторый момент времени. Этому состоянию соответствует точка на диаграмме. В последующие моменты времени значения функции изменяются, соответствующая им точка плавно смещается, в результате получается линия, которая называется фазовой траекторией.

Полным аналогом данной процедуры является построение обычной траектории движения точки по известным зависимостям ее координат от времени - $x(t)$, $y(t)$.

Вам необходимо описать динамику изменения сопротивлений терморезисторов в рассматриваемой схеме при различных начальных значениях сопротивлений r_{10} и r_{20} , которые задают начальную точку на фазовой диаграмме. Для качественного построения фазовой траектории вам не надо решать полученные вами дифференциальные уравнения! Надо уметь анализировать характер изменения сопротивлений. Необходимо отразить начальные положения (они заданы в условии) и проанализировать к каким предельным значениям будет стремиться фазовая траектория.

Рассмотрим поведение системы при $p = 0, 20$.

2.7 Найдите возможные стационарные (установившиеся) значения сопротивлений терморезисторов, нанесите их на фазовую диаграмму.

2.8 Для каждого из указанных начальных условий (они находятся на границе области и отмечены ромбами) постройте схематическую фазовую траекторию.

Пусть параметр увеличился до значения $p = 0, 30$.

2.9 Постройте аналогичное семейство фазовых траекторий для $p = 0, 30$

Подсказка. Рассмотрите также уравнение для суммы сопротивлений.