

Условие

Задание 11-3. Терморезисторы

В электротехнике используются приборы, которые называются терморезисторы, сопротивление которых достаточно сильно зависит от температуры. Если сопротивление такого резистора возрастает с ростом температуры, такой прибор называется терморезистором с положительной характеристикой (такой резистор мы будем обозначать на схемах знаком «+»). Если сопротивление прибора уменьшается с ростом температуры, то прибор называется терморезистором с отрицательной характеристикой (на схемах будем обозначать его со знаком «-»). Для реальных приборов зависимости сопротивления от температуры носят сложный и разнообразный характер. Но в данном задании эти зависимости будем приближенно описывать линейными функциями:

$$R = R_0(1 + \alpha t) \quad (1)$$

для положительной характеристики, и

$$R = R_0(1 - \alpha t) \quad (2)$$

для отрицательной характеристики.

Второй важной характеристикой является мощность теплоотдачи – количество теплоты, уходящей в окружающую среду в единицу времени. Будем считать, что мощность теплоотдачи пропорциональна температуре терморезистора

$$P = \beta t. \quad (3)$$

В формулах (1)-(3) t – есть разность между температурой терморезистора и температурой окружающей среды. Коэффициенты в формулах α, β, R_0 (1)-(3) положительные, считайте их известными. Во всех частях задания рассматривается области температур, при которых формулы (1) - (2) дают положительные значения сопротивлений:

от $t \rightarrow -\infty$ до $t = \frac{1}{\alpha}$ для терморезистора с отрицательной характеристикой;

от $t = -\frac{1}{\alpha}$ до $t \rightarrow +\infty$ для терморезистора с положительной характеристикой.

Теплоемкость каждого терморезистора равна C и не зависит от его температуры.

Считайте, что терморезистор с положительной характеристикой (1) перегорает только в том случае, когда его температура стремится к бесконечности $t \rightarrow \infty$. А терморезистор с отрицательной характеристикой (2), перегорает, если его температура стремится к $t \rightarrow \frac{1}{\alpha}$.

Если в цепи находится два терморезистора, то считайте, что обмен теплоты между ними не происходит.

Стационарным (установившимся) называется режим, в котором значения температур и сопротивлений терморезисторов перестают изменяться с течением времени.

Подсказка.

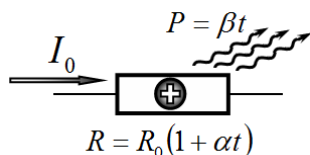
Решения каждой части задания рекомендуем начинать с записи уравнений, описывающих величины $\frac{\Delta t_{1,2}}{\Delta \tau}$ – изменения температур терморезисторов $t_{1,2}$ за малый промежуток времени $\Delta \tau$ (обозначайте время τ , чтобы не путать с температурой t). Для этого удобно ввести «относительные» сопротивления терморезисторов $r_{1,2} = \frac{R_{1,2}}{R_0}$ и перейти к уравнениям, описывающим изменения сопротивлений терморезисторов, которые можно привести к виду

$$a \frac{\Delta r_{1,2}}{\Delta \tau} = F_{1,2}(r_1, r_2, p). \quad (4)$$

где a – не существенный для данной задачи параметр, $F_{1,2}(r_1, r_2, p)$ – некоторые функции от переменных r_1, r_2 и от безразмерного параметра p , зависящего от параметров задачи $R_0, \alpha, \beta, U_0, I_0$. Для вашего удобства во всех частях задачи этот параметр будет указан.

Решать эти уравнения не следует, достаточно провести их качественный анализ и построить качественные графики требуемых зависимостей. Эти графики оцениваются по следующим критериям: начальные и предельные значения; характер зависимости – монотонность, возрастание-убывание; выпуклость – вогнутость

Все графики необходимо построить на подготовленных для вас бланках в Листах ответов. Используйте сделанную оцифровку осей координат (там, где она есть). Оси времени оцифровывать не надо. Вид построенных графиков должен быть обоснован формулами, графиками – простого угадывания недостаточно.



Часть 1. Один «положительный» терморезистор.

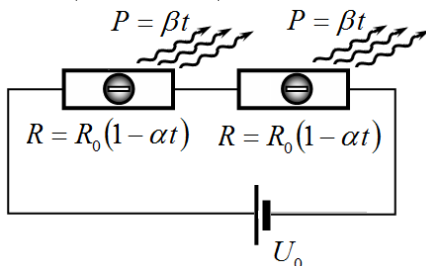
В данной части используйте безразмерный параметр $p = \frac{\alpha I_0^2 R_0}{\beta}$.

Терморезистор с положительной характеристикой включен в цепь, в которой поддерживается постоянная сила тока I_0 .

1.1 Определите максимальное значение силы тока I_0 , который может протекать через резистор без его перегорания.

1.2 Запишите уравнение вида (4), описывающее изменение относительного сопротивления резистора с течением времени. Укажите значение параметра a в данном уравнении.

1.3 На бланках в Листах ответов постройте схематические графики зависимости сопротивления терморезистора от времени при указанных значениях параметра p и различных начальных (при $\tau = 0$) значениях сопротивления r_0 .



Часть 2. Два «отрицательных» терморезистора

В этой части безразмерный параметр равен $p = \frac{\alpha U_0^2}{4\beta R_0}$.

Два одинаковых терморезистора с отрицательными характеристиками соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения U_0 .

2.1 Получите уравнения, описывающие изменения относительных сопротивлений резисторов. Приведите их к виду (4). Укажите значение параметра a в этих уравнениях.

2.2 Докажите, что возможны только такие установившиеся режимы, при которых сопротивления резисторов одинаковы $r_1 = r_2$.

Рассмотрим режим протекания тока, если в начальный момент сопротивления терморезисторов одинаковы и равны r_0 . В этом случае сопротивления резисторов могут изменяться с течением времени, но будут оставаться равными.

2.3 Определите, при каких значениях параметра p возможен установившийся режим протекания тока.

2.4 На бланках в Листах ответов постройте схематические графики зависимости сопротивления резисторов от времени при двух указанных значениях параметра p и различных начальных условиях.

2.5 Найдите максимальное значение напряжения источника $U_{0 \max}$ при которых терморезисторы не перегорают. Выразите эту величину через параметры R_0 , α , β .

2.6 Рассчитайте численные значения установившегося значения относительного сопротивле-

ния терморезисторов r при напряжении источника равно $U_0 = \frac{U_{0\max}}{2}$ и при $U_0 = 0,50 \cdot U_{0\max}$. При совместном рассмотрении двух функций от времени (в нашем случае – это зависимости сопротивлений от времени $r_1(t)$ и $r_2(t)$) наглядное представление о поведении этих функций дает, так называемая фазовая диаграмма. Для этого строится диаграмма, по осям которой откладывают значения одной и другой функции в некоторый момент времени. Этому состоянию соответствует точка на диаграмме. В последующие моменты времени значения функции изменяются, соответствующая им точка плавно смещается, в результате получается линия, которая называется фазовой траекторией.

Полным аналогом данной процедуры является построение обычной траектории движения точки по известным зависимостям ее координат от времени - $x(t)$, $y(t)$.

Вам необходимо описать динамику изменения сопротивлений терморезисторов в рассматриваемой схеме при различных начальных значениях сопротивлений r_{10} и r_{20} , которые задают начальную точку на фазовой диаграмме. Для качественного построения фазовой траектории вам не надо решать полученные вами дифференциальные уравнения! Надо уметь анализировать характер изменения сопротивлений. Необходимо отразить начальные положения (они заданы в условии) и проанализировать к каким предельным значениям будет стремиться фазовая траектория.

Рассмотрим поведение системы при $p = 0,20$.

2.7 Найдите возможные стационарные (установившиеся) значения сопротивлений терморезисторов, нанесите их на фазовую диаграмму.

2.8 Для каждого из указанных начальных условий (они находятся на границе области и отмечены ромбами) постройте схематическую фазовую траекторию.

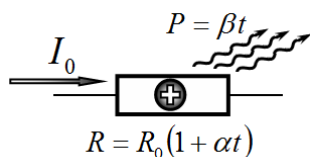
Пусть параметр увеличился до значения $p = 0,30$.

2.9 Постройте аналогичное семейство фазовых траекторий для $p = 0,30$

Подсказка. Рассмотрите также уравнение для суммы сопротивлений.

Решение

Задание 11-3. Терморезисторы Решение

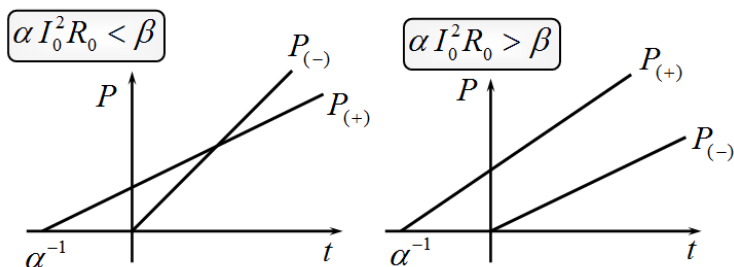


Часть 1. Один «положительный» терморезистор.

1.1 В этом случае уравнение теплового баланса имеет вид

$$C \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = I_0^2 R_0 (1 + \alpha t) - \beta t \quad (1)$$

Терморезистор перегорит, если мощность теплоты, выделяющейся при протекании тока $P_{(+)} = I_0^2 R_0 (1 + \alpha t)$, все время будет превышать мощность теплоотдачи $P_{(-)} = \beta t$. Построим схематические графики зависимостей этих мощностей от температуры.



Обе функции являются линейными, поэтому их графики – прямые линии.

Из графиков следует, что они будут иметь общую точку пересечения в указанном диапазоне температур, если наклон графика $P_{(-)}$ будет больше наклона графика $P_{(+)}$, т.е. при выполнении условия

$$\alpha I_0^2 R_0 < \beta. \quad (2)$$

В противном случае мощность поступающей теплоты все время будет превышать мощность уходящей теплоты, поэтому резистор будет разогреваться до бесконечности и перегорит.

Следовательно, максимальная сила тока, который может протекать через резистор, равна

$$I_{0 \max} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha R_0}}. \quad (3)$$

Способ решения 2.

Из уравнения (1) следует, что в стационарном режиме установившаяся температура терморезистора равна

$$I_0^2 R_0 (1 + \alpha t) - \beta t = 0 \Rightarrow \bar{t} = \frac{I_0^2 R_0}{\beta - \alpha I_0^2 R_0}. \quad (4)$$

Из этой формулы следует, что установившийся режим возможен только при выполнении неравенства (2). Однако в данном решении нет аргументации того, что температура будет расти до бесконечности. Поэтому данное решение оценивается меньшим числом баллов.

1.2 Перейдем к уравнению для изменения сопротивления по рекомендованной методике.

Для этого выразим температуру резистора через его сопротивление.

Из формулы $R = R_0(1 + \alpha t)$ следует

$$r = \frac{R}{R_0} = 1 + \alpha t, \quad t = \frac{r-1}{\alpha}, \quad dt = \frac{dr}{\alpha} \quad (5)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получим

$$\frac{C}{\alpha} \frac{\Delta r}{\Delta \tau} = I_0^2 R_0 r - \frac{\beta}{\alpha} (r - 1) \Rightarrow \frac{C}{\beta} \frac{\Delta r}{\Delta \tau} = \frac{\alpha I_0^2 R_0}{\beta} r - (r - 1) \quad (6)$$

Тем самым приходим к нужному виду уравнения

$$a \frac{\Delta r}{\Delta \tau} = pr - (r - 1) \quad (7)$$

Перепишем уравнение в наглядной форме

$$a \frac{\Delta r}{\Delta \tau} = pr - (r - 1) = (p - 1) \left(r - \frac{1}{1-p} \right) \quad (8)$$

1.3 Из этого уравнения следует, что:

а) при $p < 1$ сопротивление стремится к предельному значению

$$\bar{r} = \frac{1}{1-p}, \quad (9)$$

независимо от начального значения;

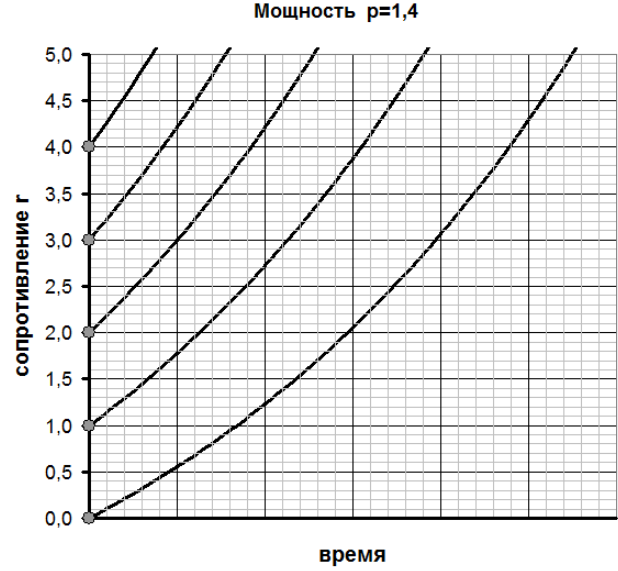
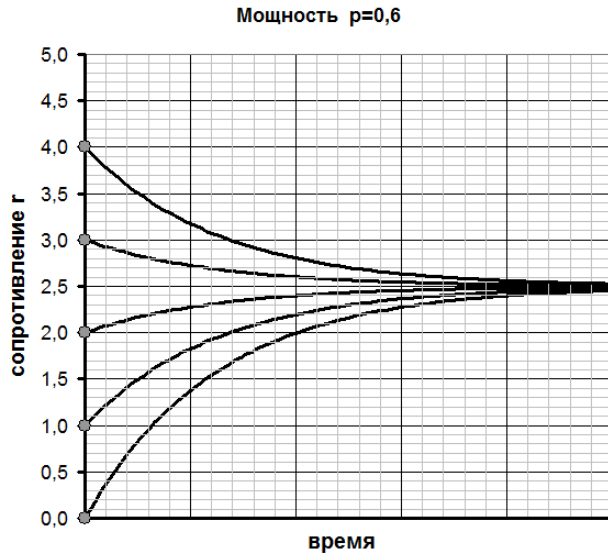
б) при $p > 1$ сопротивление стремится к бесконечности независимо от начального условия.

При заданных значениях параметров:

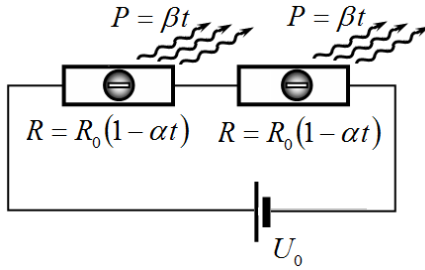
а) $p = 0,6$ - существует стационарное значение $\bar{r} = \frac{1}{1-0,6} = 2,5$, поэтому все кривые стремятся к этому значению;

б) $p = 1,4$ - стационарного значения нет, поэтому все кривые уходят в бесконечность, причем, чем больше начальное значение r_0 , тем быстрее растет сопротивление.

Требуемые графики показаны на рисунке.



Часть 2. Два «отрицательных» терморезистора



2.1 При последовательном соединении сила тока в цепи постоянна и равна

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \quad (10)$$

Поэтому уравнения теплового баланса для терморезисторов имеют вид

$$\left\{ C \frac{\Delta t_1}{\Delta \tau} = \frac{U_0^2}{(R_1 + R_2)^2} R_1 - \beta t_1 \right\} \quad (11)$$

Уравнения (11) отличаются только индексом, поэтому достаточно преобразовать одно из них, результат преобразования второго – аналогичен. Выразим значение температуры терморезистора через его сопротивление

$$R_1 = R_0(1 - \alpha t_1) \Rightarrow t_1 = \frac{1 - r_1}{\alpha}; \Delta t_1 = -\frac{1}{\alpha} \Delta r_1. \quad (12)$$

После подстановки в уравнение (11), получим

$$-\frac{C}{\alpha} \frac{\Delta r_1}{\Delta \tau} = \frac{U_0^2}{R_0} \frac{r_1}{(r_1 + r_2)^2} - \frac{\beta}{\alpha} (1 - r_1). \quad (12)$$

Разделив уравнение на отношение $(-\frac{\beta}{\alpha})$, получим его в требуемом виде

$$\frac{C}{\beta} \frac{\Delta r_1}{\Delta \tau} = -\frac{\alpha}{4\beta} \frac{U_0^2}{R_0} \frac{4r_1}{(r_1 + r_2)^2} + (1 - r_1). \quad (13)$$

В котором $a = \frac{C}{\beta}$ и присутствует указанный параметр p .

Таким образом, требуемая система уравнений имеет вид

$$\left\{ a \frac{\Delta r_1}{\Delta \tau} = -4p \frac{r_1}{(r_1 + r_2)^2} + (1 - r_1) \right\} \quad (14)$$

2.2 Получим уравнение, описывающее изменение разности сопротивлений, для чего вычтем из первого уравнения системы (14) второе:

$$a \frac{\Delta(r_1 - r_2)}{\Delta \tau} = -4p \frac{(r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)^2} - (r_1 - r_2) = -\left(\frac{4p}{(r_1 + r_2)^2} + 1 \right) (r_1 - r_2) \quad (15)$$

Так как коэффициент, стоящий при разности сопротивлений отрицателен при любых значениях мощности и сопротивлений отрицательный, то при любых начальных условиях разность

сопротивлений стремиться к нулю. Следовательно, в установившемся режиме сопротивления терморезисторов будут равны.

Рассмотрим одно из уравнений системы (14) при $r_1 = r_2 = r$ (в этом случае уравнения одинаковы):

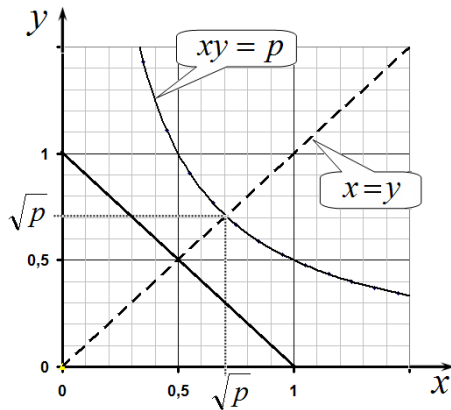
$$a \frac{\Delta r_1}{\Delta \tau} = -4p \frac{r_1}{(r_1 + r_2)^2} + (1 - r_1) \Rightarrow \frac{\Delta r}{\Delta \tau} = -\frac{p}{r} + (1 - r) \quad (16)$$

Это есть уравнение, описывающее динамику изменения сопротивления.

Укажем физический смысл слагаемых этого уравнения:

- величина $P_{(+)} = \frac{p}{r}$ есть мощность теплоты (в используемых единицах измерения), выделяющейся при протекании тока – нагрев проводника приводит к уменьшению его сопротивления, поэтому в уравнении (16) она отрицательна;
- величина $P_{(-)} = 1 - r$ – есть мощность теплоты, уходящей в окружающую среду – ее увеличение приводит к уменьшению температуры резистора, следовательно, к увеличению его сопротивления.

2.3 В установившемся режиме эти мощности равны $P_{(+)} = P_{(-)}$.



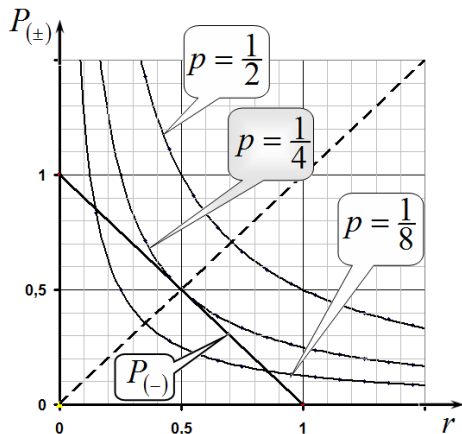
Решение данной задачи имеет красивое геометрическое истолкование. Обозначим $x = r$, а равные мощности теплоты $y = P_{(\pm)}$. Тогда поставленная математическая задача формулируется следующим образом: найти точки пересечения линий, задаваемых уравнениями

$$\{x + y = 1\} \quad (17)$$

Первое уравнение задает прямую, отсекающую на осях координат единичные отрезки. Второе уравнение описывает гиперболу, симметричную относительно биссектрисы координатного угла. Координаты точки пересечения гиперболы с биссектрисой легко найти

$$x = y \Rightarrow (x)^2 = p \Rightarrow x = y = \sqrt{p}.$$

На рисунке приведена иллюстрация найденным соотношениям.



Теперь можно легко построить схематические графики зависимостей мощностей:

$P_{(+)} = \frac{p}{r}$ (при разных значениях p) и $P_{(-)} = 1 - r$. Из проведенного анализа следует, что гипербола и прямая касаются друг друга при $\sqrt{p} = \frac{1}{2}$, или при $p = \frac{1}{4}$. При меньшем значении p имеются две стационарные точки. Из уравнения (13) следует, что увеличение мощности $P_{(+)}$ приводит к уменьшению сопротивления, а увеличение мощности $P_{(-)}$ - к увеличению сопротивления. Простой анализ поведения сопротивления при отклонении от стационарного значения показывает, что устойчивым является большее стационарное значение. Таким образом, при $p < \frac{1}{4}$ существует устойчивое стационарное значение сопротивления термистора (следовательно, и его температуры). При $p > \frac{1}{4}$ стационарных значений сопротивления нет. В этом случае мощность, выделяющаяся при протекании тока всегда, превышает мощность потерь, что приведет к бесконечному увеличению температуры и перегоранию терморезистора. Подводя итог проведенному анализу, сформулируем окончательный ответ на поставленный вопрос: установившийся режим протекания тока возможен при $p < \frac{1}{4}$. (18)

Способ решения 2.

Эти же результаты могут быть получены и на основании анализа корней уравнения (13) в стационарном режиме

$$\frac{\Delta r}{\Delta \tau} = -\frac{p}{r} + (1 - r) = 0,$$

которое приводится к квадратному уравнению

$$r^2 - r + p = 0$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = 1 - 4p.$$

и может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Интерпретация этих вариантов почти очевидна:

- а) при $D > 0$ (т.е. при $p < \frac{1}{4}$) уравнение имеет два корня; их можно найти, но надо доказать, что больший из них является устойчивым;
- б) при $D < 0$ (т.е. при $p > \frac{1}{4}$) уравнение корней не имеет, но надо доказать, что в этом случае температура неограниченно возрастает;
- в) при $D = 0$ (т.е. при $p = \frac{1}{4}$) корни уравнения совпадают, что соответствует «критическому» случаю.

2.4 Для качественного описания изменения сопротивления найдем возможные стационарные (установившиеся) значения сопротивления.

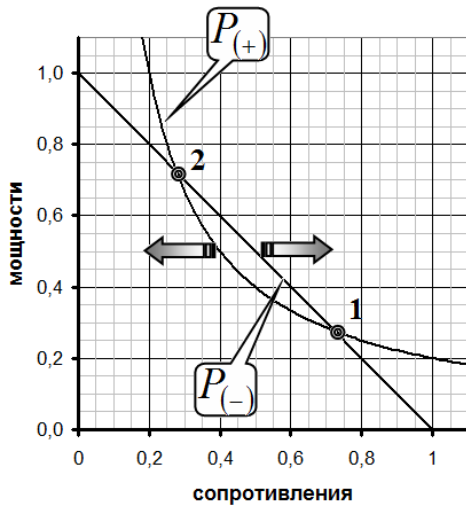
как было показано в предыдущем пункте, при $p < \frac{1}{4}$, имеются две стационарные точки, являющиеся корнями уравнения

$$\frac{\Delta r}{\Delta \tau} = -\frac{p}{r} + (1 - r) = 0 \Rightarrow r^2 - r + p = 0 \quad (19)$$

Эти корни равны (при заданном значении параметра $p = 0, 20$)

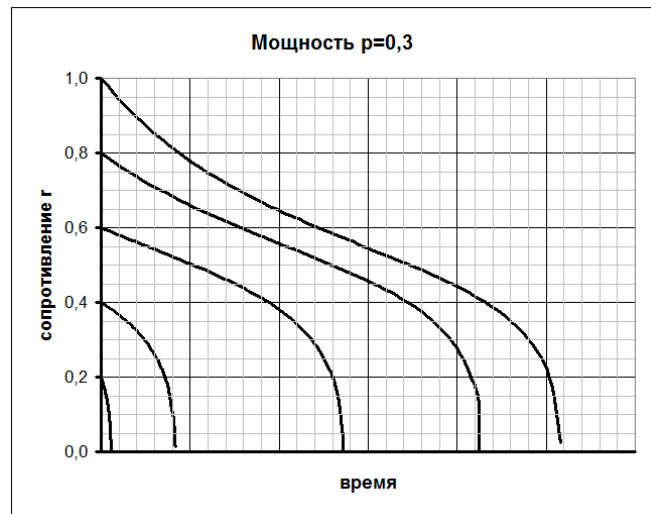
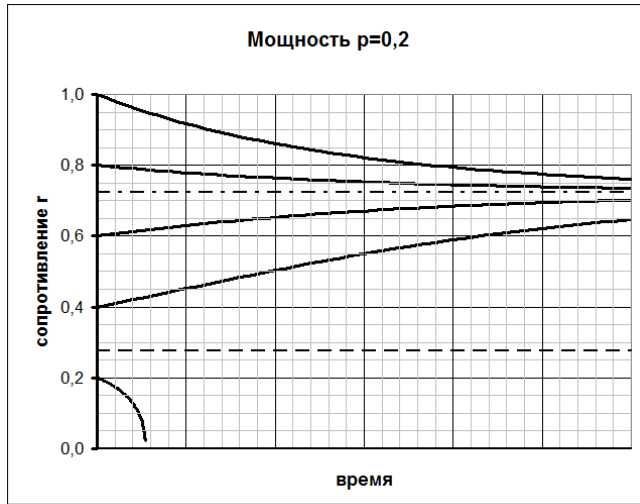
$$\bar{r} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p}}{2} \Rightarrow \{(\bar{r})_1 = 0, 72 \mid (\bar{r})_2 = 0, 28\} \quad (20)$$

Еще раз построим графики функций $P_{(+)}$, $P_{(-)}$ при $p = 0, 20$. Стрелками указано, как каждая мощность влияет на сопротивление. Этот рисунок подтверждает, что точка $(\bar{r})_1 = 0, 72$ является устойчивой. Поэтому при начальном условии $r_0 > (\bar{r})_2 = 0, 28$ сопротивление будет монотонно стремиться к значению $(\bar{r})_1 = 0, 72$.



При $r_0 < (\vec{r})_2 = 0,28$ сопротивление будет стремиться к нулю, т.е. терморезисторы в этом случае перегорают.

Нужно также отметить, что при приближении к нулю скорость падения сопротивления резко возрастает, линии пересекают ось времени практически вертикально.



На рисунках ниже показаны требуемые зависимости.

2.5 Максимальному значению напряжения соответствует максимальное значение параметра p , которое, как следует из проведенного анализа, равно $p_{\max} = \frac{1}{4}$. Тогда из определения этого параметра $p_{\max} = \frac{\alpha U_{0\max}^2}{4\beta R_0} = \frac{1}{4}$, находим, что

$$U_{0\max} = \sqrt{\frac{\beta R_0}{\alpha}}. \quad (21)$$

2.6 При уменьшении напряжения в 2 раза параметр p уменьшается в 4 раза, т.е. оказывается равным $p = \frac{1}{16}$ (или 0,0625). Для определения установившегося значения сопротивления необходимо решить уравнение

$$\frac{p}{r} = 1 - r \quad (22)$$

и выбрать его больший корень, так как он является устойчивым, что можно проделать без комментариев

$$\frac{p}{r} = 1 - r \Rightarrow r^2 - r + p = 0$$

$$r = \frac{1 + \sqrt{1 - 4p}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \approx 0,93$$

В соответствии с правилами представления точных и приближенных чисел Имеем:

при $U_0 = \frac{U_{0 \max}}{2}$ $p = \frac{1}{16}$ (точно) тогда

$$r = \frac{1 + \sqrt{1 - 4p}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \quad (23)$$

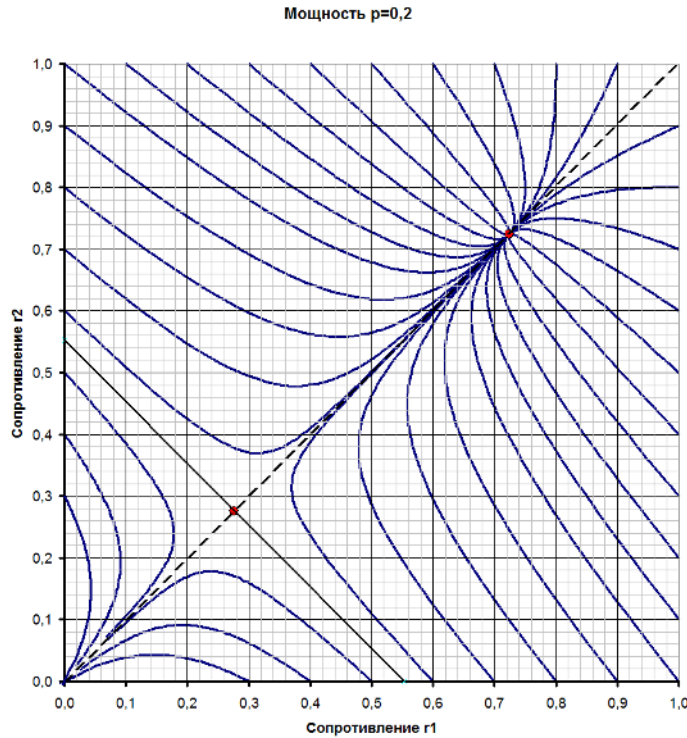
при $U_0 = 0,50U_{0 \max}$ $p = 0,0625$ и

$$r = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \approx 0,93. \quad (24)$$

2.7 Зависимости сопротивлений терморезисторов от времени описываются полученной ранее системой уравнений (14). Фактически мы должны проанализировать возможные решения этих уравнений. Из полученного ранее уравнения (15) следует, что разность сопротивлений при любых их значениях стремится к нулю, поэтому все фазовые траектории стремятся к диагонали диаграммы $r_1 = r_2$.

Просуммируем уравнения (14), чтобы получить уравнение для суммы сопротивлений.

$$\left\{ a \frac{\Delta r_1}{\Delta \tau} = -4p \frac{r_1}{(r_1 + r_2)^2} + (1 - r_1) \right\}$$



Ранее мы показали, что стационарные точки существуют только при $p < \frac{1}{4}$ и нашли их значения (20). Нанесем их на фазовую диаграмму.

2.8 Как было показано ранее, точка с большим значением сопротивления является устойчивой, поэтому все фазовые траектории будут «уходить» в нее.

2.9 При $p = 0,3$ устойчивых точек нет, поэтому все фазовые траектории будут разбегаться.

