

Условие

Задание 11-1. Сифон

Приборы и оборудование: мензурка 250 мл, пластиковая бутылка 0,5 л, линейка 40 см, тонкая стеклянная трубка, гибкий силиконовый шланг с зажимом и с деревянным стержнем, штатив с лапкой, секундомер с памятью этапов, стакан 500 мл, салфетка дезинфицирующая, салфетка бумажная.

Внимание!

1. Будьте предельно аккуратны в работе – не разбейте стеклянную трубку – вторая трубка выдаваться не будет!
2. Если Вы пролили воду на стол – протрите его бумажной салфеткой.
3. Вам будет необходимо брать конец шланга в рот, поэтому регулярно протирайте его конец дезинфицирующей салфеткой.
4. В данном задании требуется (и будет оцениваться) точность измерений, корректность проведения обработки результатов и, конечно, понимание физических законов, описывающих проводимые эксперименты.

Рекомендации по подготовке установки.

1. В пробке бутылки проделаны отверстия, в которые вставляются стеклянная трубка и гибкий шланг. Для закрепления шланга внутри бутылки в вертикальном положении используется деревянный стержень. Положения трубки и шланга внутри бутылки можно регулировать, Вам необходимо регулярно заполнять бутылку водой. Просим Вас не спешить и быть аккуратным (чтобы не разбить трубку): чтобы открутить пробку с трубками, держите ее одной рукой, а второй вращайте бутылку.
2. После того, как Вы налили в бутылку нужное количество воды, закрутите пробку, перекройте зажимом шланг и после этого закрепляйте бутылку в лапке штатива на нужной высоте. Чтобы вода начала выливаться, открой зажим шланга (*при необходимости можно продуть воздух в шланге*).
3. Все измерения объемов проводите только с помощью мензурки.
4. Измеряемые объемы вытекающей воды должны быть не менее 200 мл. При проведении временных измерений используйте все 10 этапов памяти секундомера.
4. К секундомеру прилагается Инструкция по его использованию, при необходимости обращайтесь к организаторам за помощью.

Математическая подсказка.

Если некоторая переменная величина $X(t)$ подчиняется уравнению

$$\frac{dX}{dt} = -aX, \quad (1)$$

где a - постоянный коэффициент, то зависимость этой величины от времени описывается функцией

$$X(t) = X_0 e^{-at} = X_0 \exp(-at), \quad (2)$$

где X_0 значение функции $X(t)$ при $t = 0$.

Физическая подсказка.

Расход жидкости (т.е. объем, который протекает через поперечное сечение трубки в единицу времени) пропорционален разности давлений на концах трубки (закон Пуазейля):

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = K (P_1 - P_2), \quad (3)$$

где K - коэффициент, зависящий от геометрических размеров трубки и вязкости протекающей жидкости. В данной работе давление измеряется в сантиметрах водяного столба (обозначайте $[P] = \text{см}$). Так как в данной работе используется одна трубка, а течет только вода, то этот коэффициент остается постоянным.

Объем жидкости измеряйте в миллилитрах (мл), все расстояния в сантиметрах (см).

Часть 1. Предварительные измерения.

1.1 Измерьте длину трубки l .

Для дальнейших расчетов удобно ввести цилиндрические параметры сосудов $b = \frac{\Delta z}{\Delta V}$, имеющих наглядный смысл: изменение объема уровня воды в сосуде Δz , при изменении объема на величину ΔV . Или – чему равна высота Δz столбика 1 мл воды в сосуде.

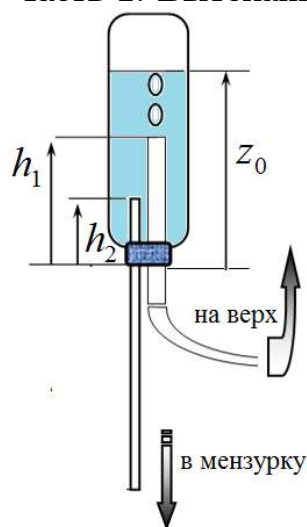
1.2 Проведите необходимые измерения и рассчитайте значения этих параметров: b_0 – для мензурки и b_1 – для бутылки. Укажите, какие величины вы непосредственно измеряли и по каким формулам рассчитали требуемые параметры.

Примечание. Измерять внутренние диаметры сосудов не рекомендуем.

Погрешности измерения этих трех величин рассчитывать не требуется, в дальнейших расчетах ими следует пренебрегать.

Используйте эти параметры, чтобы быстро оценивать, какой объем воды следует заливать в бутылку в каждом эксперименте.

Часть 2. Вытекание из бутылки.



В этой части вам необходимо исследовать вытекание воды из вертикально расположенной бутылки при различных расположениях трубки и шланга внутри бутылки. Во всех экспериментах свободный конец шланга прикрепляйте к верхней части штатива выше уровня воды в бутылке. Вода должна наливаться в мензурку, при этом нижний край трубки не должен касаться воды.

2.1 Расположите трубку и шланг внутри бутылки, как показано на рисунке. Все высоты измеряйте от нижнего края пробки.

В данном эксперименте используйте следующие значения:

высота уровня шланга $h_1 = 10,0$ см;

высота уровня трубки $h_2 = 1,0$ см;

Начальную высоту уровня жидкости z_0 подберите таким образом, чтобы в ходе вытекания 200 мл воды верхние концы шланга и трубки оставались в воде

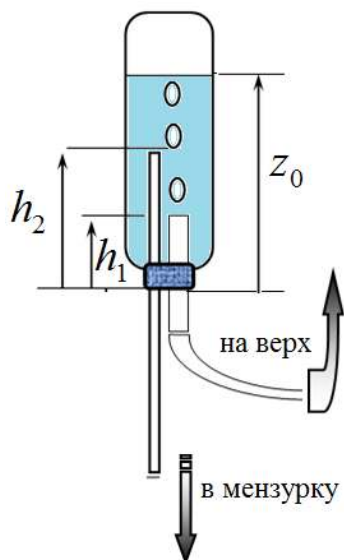
2.1.1 Укажите значение начального уровня воды в трубке z_0 .

2.1.2 Измерьте зависимость объема вытекшей воды от времени $V(t)$. Постройте график полученной зависимости. Укажите формулу, описывающую полученную зависимость. Найдите численные значения параметров этой формулы.

2.1.3 Предложите теоретическую формулу описывающую полученную зависимость $V(t)$.

2.1.4 Рассчитайте значения коэффициента K в формуле для данной трубки. Оцените его погрешность.

2.2 Измените положение трубки и шланга, как показано на следующем рисунке. Измерения



проводите при следующих значениях высот: $h_1 = 2,0\text{ см}$; $h_2 = 11,0\text{ см}$.

2.2.1 Укажите значение начального уровня воды в бутылке z_0 .

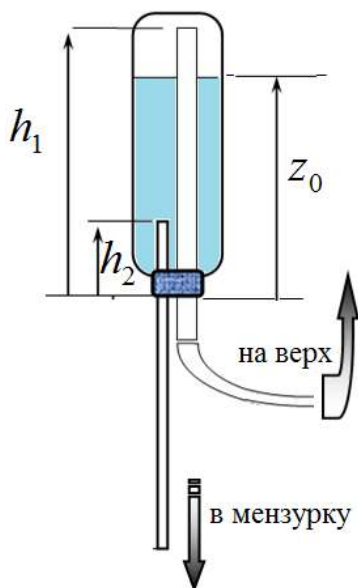
2.2.2 Измерьте зависимость объема вытекшей воды от времени $V(t)$. Постройте график полученной зависимости на том же бланке, что и в п. 2.1.2

2.2.3 Предложите теоретическую формулу описывающую полученную зависимость $V(t)$.

2.2.4 Рассчитайте значение коэффициента K в формуле для данной трубки. Оцените его погрешность.

2.2.5 Укажите, можно ли считать найденные значения K в (п.2.1.4 и 2.2.4) равными. Укажите, какое значение K Вы будете использовать в дальнейшем.

2.3 Еще раз измените положения трубки и шланга, как показано на следующем рисунке.



Верхний край шланга все время должен находиться в верхней части бутылки, заполненной воздухом.

Верхний уровень трубки установите на высоте $h_2 = 3,0\text{ см}$.

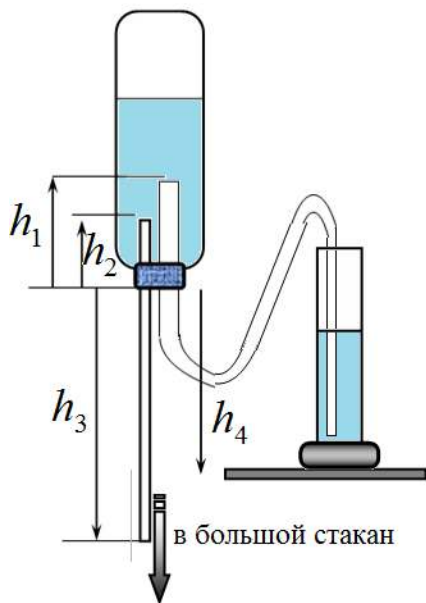
Начальную высоту уровня воды z_0 подберите такой, чтобы после вытекания 200 мл уровень воды совсем немного превышал уровень трубки.

2.3.1 Укажите значение начального уровня воды в бутылке z_0 .

2.3.2 Измерьте зависимость объема вытекшей воды от времени $V(t)$. Постройте график полученной зависимости. На отдельном бланке.

2.3.3 Рассчитайте на основании экспериментальных данных коэффициенты наклона (с погрешностями) сглаживающих прямых изменения объема на участках: а) от 0 до 100 мл; б) от 100 до 200 мл. Укажите, можно ли считать полученную зависимость нелинейной.

2.3.4 Рассчитайте по найденным в п. 2.3.3 коэффициентам наклона значения коэффициента K . Рассчитывать погрешности в данном пункте не требуется.



Часть 3. Всасывание.

Измените положение трубок внутри бутылки: $h_1 = 3,0$ см; $h_2 = 6,0$ см. Расположите штатив таким образом, чтобы нижний конец стеклянной трубки находился рядом с краем стола и ниже его. Вода из трубки должна выливаться в большой пластиковый стакан, который Вы расположите на полу. Свободный конец шланга опустите в мензурку, он должен находиться у дна мензурки, закрепите шланг к верхнему краю мензурки. Разность высот $h_3 - h_4$ установите в пределах от 8 до 9 см.

Налейте в бутылку примерно 300 мл воды. Мензурку полностью заполните водой. Если теперь полностью заполнить шланг водой (для этого надо подсосать ее через стеклянную трубку), то вода начнет переливаться из мензурки в бутылку, а затем в стакан на полу.

В данном задании Вам необходимо исследовать изменение объема воды в мензурке с течением времени $V(t)$. Этот объем измеряйте по шкале мензурки, учитывая объем погруженной части трубки не надо (подумайте на досуге, почему?). В начальный момент мензурка должна быть полностью заполнена.

Укажите в Листах ответов значения всех параметров установки h_1 , h_2 , h_3 , h_4 .

3.1 Измерьте зависимость объема воды в мензурке от времени $V(t)$. Постройте график полученной зависимости.

3.2 Выведите теоретическую формулу, описывающую зависимость объема от времени $V(t)$.

3.3 Постройте линеаризованный график полученной экспериментальной зависимости, т.е. найдите такую функцию $Y(V)$, чтобы ее зависимость от времени была линейной. Постройте график линеаризованной зависимости $Y(t)$. Результаты расчетов этих величин занесите в Таблицу п. 3.1.

3.4 Используя построенный линеаризованный график, найдите численное значение коэффициента K . Оценивать его погрешность не требуется.

Решение

Задание 11-1. Сифон Решение

Часть 1. Предварительные измерения.

1.1 Длина трубки $l = 35,0$ см

1.2 Как измеряли b_0 ?

Измеряем по шкале мензурки расстояние между двумя отметками известных объемов: между отметками с разностью 200 мл расстояние 18,0 мм. Следовательно,

Численное значение $b_0 = 9,00 \cdot 10^{-2} \frac{\text{см}}{\text{мл}}$

Как измеряли b_1 ? Заливаем в частично наполненную бутылку 400 мл воды. Измеряем изменение уровня воды – 13,6 см.

Численное значение $b_1 = 3,15 \cdot 10^{-2} \frac{\text{см}}{\text{мл}}$

Часть 2. Вытекание из бутылки.

2.1 Укажите Ваши значения $h_1 = 10,0$ см $h_2 = 1,0$ см

2.1.1 Значение начального уровня воды в бутылке $z_0 = 15,0$ см.

2.1.2 Результаты измерений зависимости $V(t)$

Таблица 1.

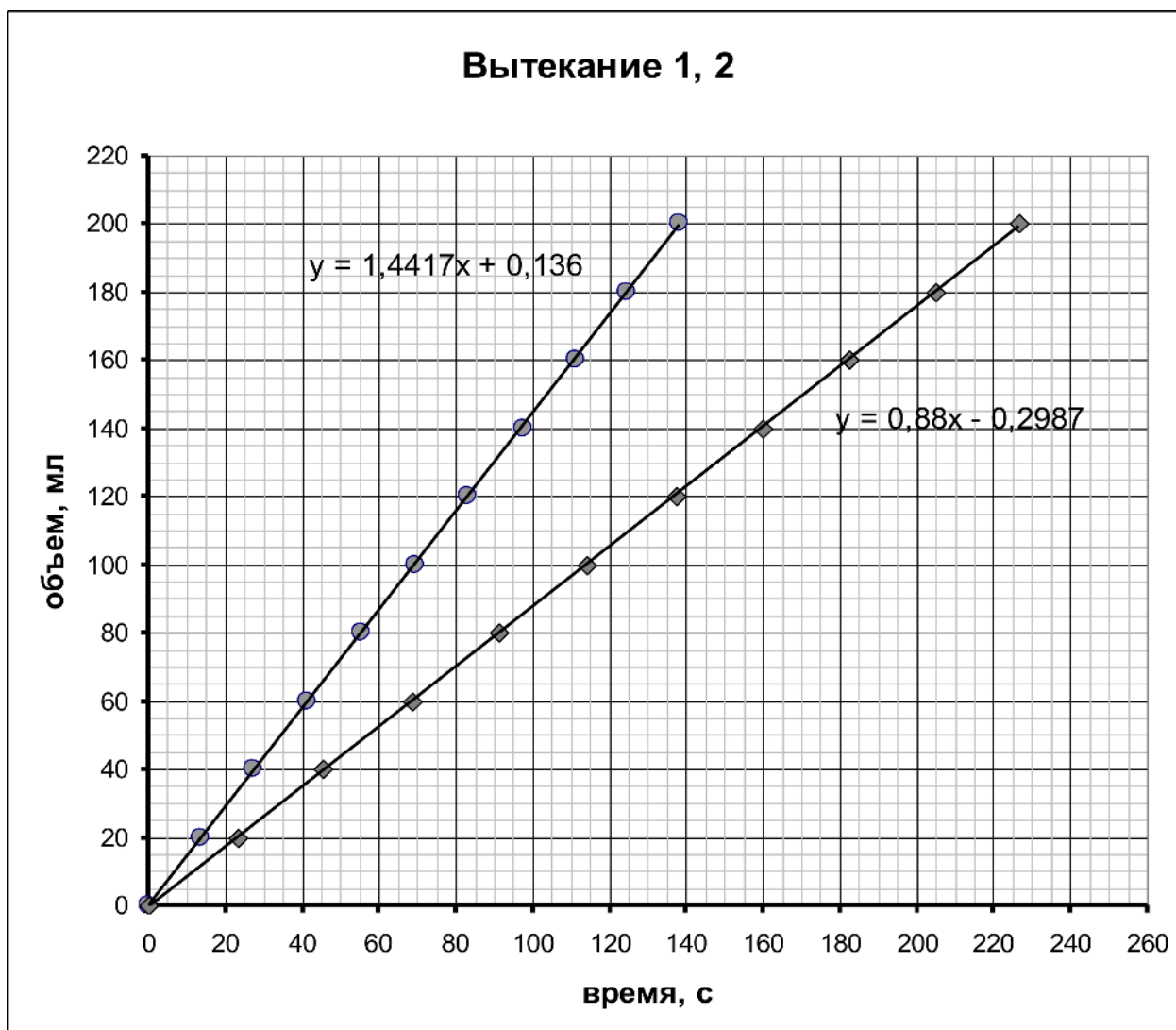
V, мл	t, с	Описание функциональной зависимости
0	0,00	Формула зависимости $V = at + b$ Значения параметров (с погрешностями): $a = (1,442 \pm 0,006) \frac{\text{мл}}{\text{с}}$ $\varepsilon_a = 0,004 = 0,4\%$ $b = 0,14 \pm 0,47 \Rightarrow b = 0$
20	13,64	
40	27,41	
60	41,54	
80	55,37	
100	69,40	
120	83,02	
140	97,64	
160	111,13	
180	124,47	
200	138,31	

Метод расчета параметров зависимостей (формулы):

Использован традиционный МНК

$$a = \frac{R}{S_x^2}, b = \langle y \rangle - a \langle x \rangle$$

Графики зависимостей $V(t)$ (пп. 2.1.2 и 2.2.2)



2.1.3 Вывод теоретической формулы

Разность давлений на концах трубки остается постоянной и равной

$$\Delta P = (l + h_2 - h_1) \quad (1)$$

Поэтому закон вытекания

$$V(t) = K (l + h_2 - h_1) t. \quad (2)$$

2.1.4 Расчет коэффициента K (формула, формула для погрешности, численное значение)

$$a = K (l + h_2 - h_1) \Rightarrow K = \frac{a}{(l + h_2 - h_1)} = 3,277 \cdot 10^{-2} \frac{\text{мл}}{\text{см} \cdot \text{с}}$$

$$\text{Погрешность } \Delta K = K \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2} = 3,3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{мл}}{\text{см} \cdot \text{с}}$$

Итого

$$K = (3,27 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \frac{\text{мл}}{\text{см} \cdot \text{с}}$$

2.2 Укажите Ваши значения $h_1 = 2,0\text{см}$ $h_2 = 11,0\text{см}$

2.2.1 Значение начального уровня воды в бутылке $z_0 = 15,0\text{см}$.

2.2.2 Результаты измерений зависимости $V(t)$

Таблица 2.

V, мл	t, с	Описание функциональной зависимости
0	0,00	Формула зависимости $V = at + b$ Значения параметров (с погрешностями): $a = (0,880 \pm 0,004) \frac{\text{мл}}{\text{с}}$ $\varepsilon_a = 0,004 = 0,4\%$ $b = -0,30 \pm 0,45 \Rightarrow b = 0$
20	23,23	
40	45,38	
60	68,60	
80	91,28	
100	113,96	
120	137,32	
140	160,07	
160	182,37	
180	204,78	
200	226,76	

График на бланке п. 2.1.2

2.2.3 Вывод теоретической формулы

Аналогично п. 2.1.3 $V(t) = K(l + h_2 - h_1) t$

2.2.4 Расчет коэффициента K (формула, формула для погрешности, численное значение)

Аналогично п.2.1.4

$$K = (3,38 \pm 0,06) \cdot 10^{-2} \frac{\text{мл}}{\text{см} \cdot \text{с}}$$

2.2.5 Можно ли считать найденные значения K в (п.2.14 и 2.2.4) равными? Краткое обоснование.

Да, так их разность в пределах погрешностей измерений.

Далее используется среднее по двум измерениям значение

$$K = 3,33 \cdot 10^{-2} \frac{\text{мл}}{\text{см} \cdot \text{с}}$$

2.3 Укажите Ваши значения $h_1 = 16,0\text{см}$ $h_2 = 5,0\text{см}$

2.3.1 Значение начального уровня воды в бутылке $z_0 = 14,5\text{см}$.

2.3.2 – 2.3.3 Результаты измерений зависимости $V(t)$

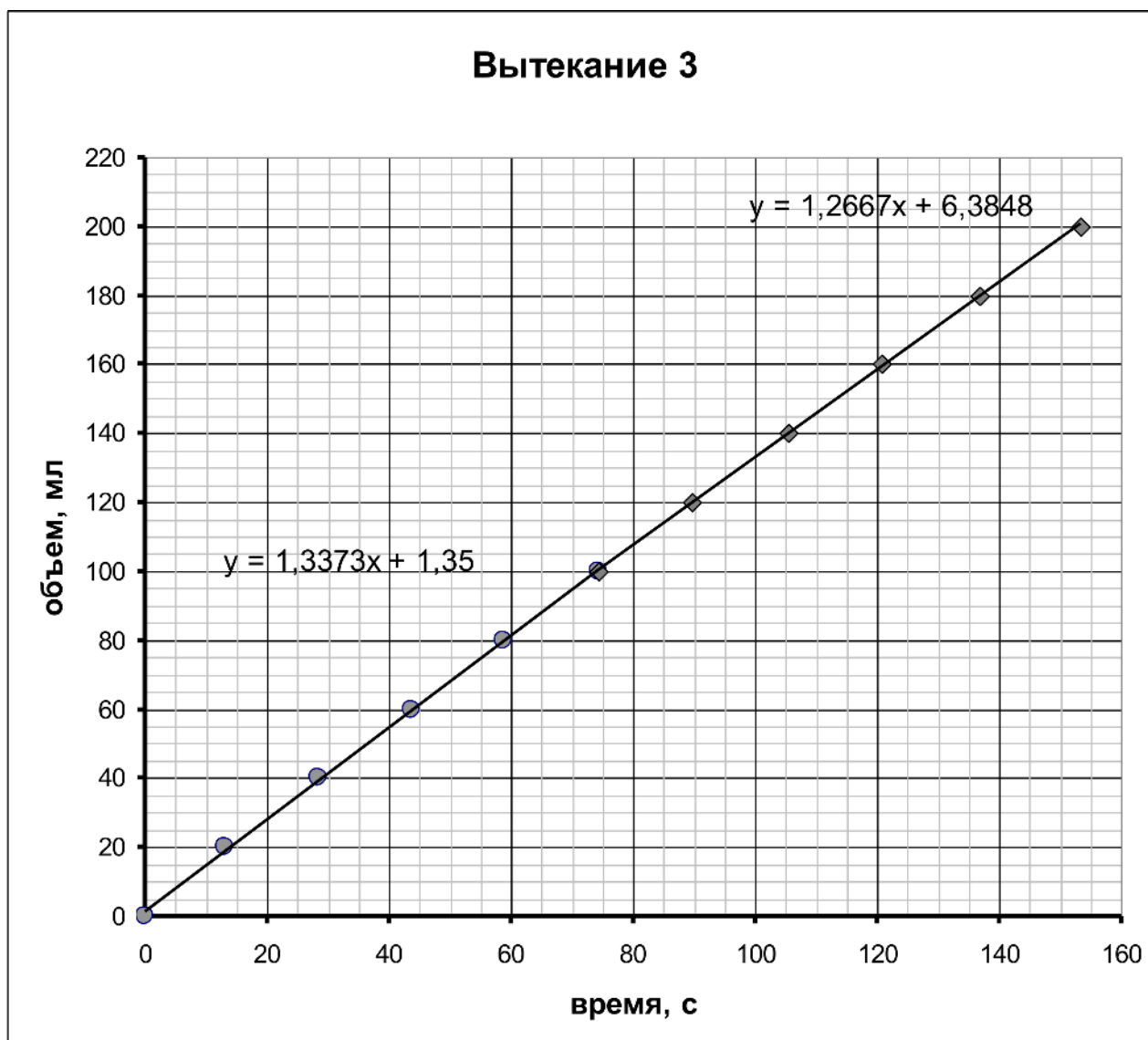
Таблица 3.

V мл	t, с	Значения коэффициентов наклона
0	0,00	интервал 0 – 100 мл $a = (1,34 \pm 0,03) \frac{\text{мл}}{\text{с}}$ интервал 100 – 200 мл $a = (1,27 \pm 0,02) \frac{\text{мл}}{\text{с}}$
20	13,13	
40	28,47	
60	43,71	
80	58,75	
100	74,21	
120	89,75	
140	105,41	
160	120,68	
180	136,78	
200	153,44	

Является ли зависимость линейной? Краткое обоснование.

Нет, так различия в коэффициентах наклона выходят за пределы погрешности.

График зависимости $V(t)$



2.3.4 Значения коэффициента K

Метод расчета (вывод формул)

Изменение объема воды в бутылке описывается уравнением

$$\frac{dV_1}{dt} = -K(z + l - h_2)$$

Вылившийся объем $V = V_0 - V_1$ подчиняется уравнению

$$\frac{dV}{dt} = K(z + l - h_2)$$

Высота уровня воды в бутылке выражается через объем следующим образом

$z = b_1 V_1 = b_1 (V_0 - V) = z_0 - b_1 V$, поэтому

$$\frac{dV}{dt} = K(z_0 - b_1 V + l - h_2) = -b_1 K \left(V - \frac{l + z_0 - h_2}{b_1} \right) = -b_1 K (V - V_0),$$

где $V_0 = \frac{l + z_0 - h_2}{b_1}$. Это уравнение показывает, что зависимость действительно нелинейная. Од-

нако, в рассматриваемых интервалах ее можно считать приближенно линейной. Тогда

$K = \frac{a}{b_1(\langle V \rangle - V_0)}$, где $\langle V \rangle$ - среднее значение объема на рассматриваемом интервале.

Численные значения:

Интервал 0 -100 мл $K = 3,085 \frac{\text{мл}}{\text{см} \cdot \text{с}}$

Интервал 100 – 200 мл $K = 3,095 \frac{\text{мл}}{\text{см} \cdot \text{с}}$

Часть 3. Всасывание.

Укажите Ваши значения

$$h_1 = 5,0 \text{ см} \quad h_2 = 3,0 \text{ см} \quad h_3 = 32,0 \text{ см} \quad h_4 = 23,5 \text{ см}$$

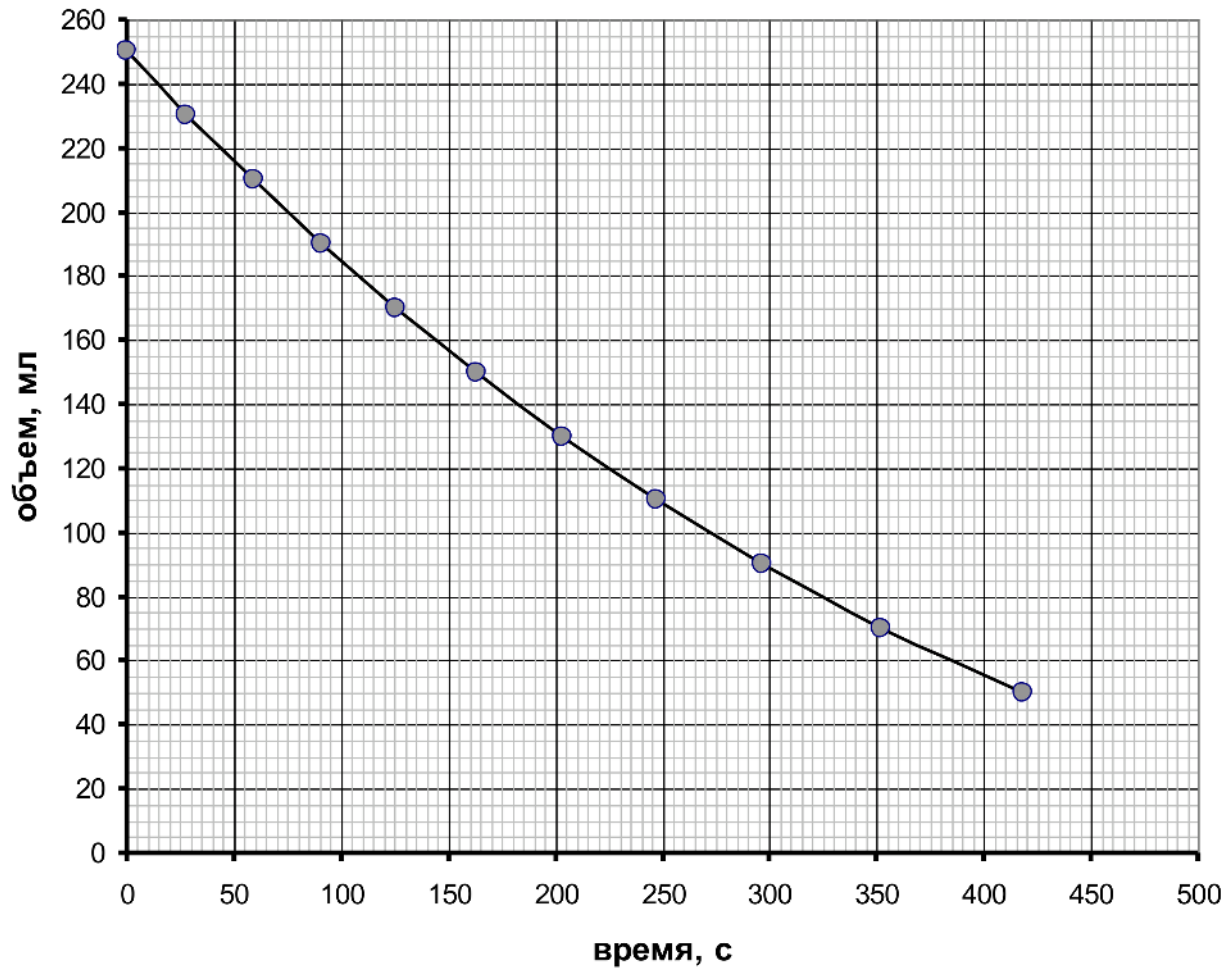
3.1 Результаты измерений

Таблица 4.

V, мл	t, мин	t, с	t, общ	$Y(V) = \ln(V + V)$
250	0,00	0,00	0,00	5,842
230	0,00	27,90	27,90	5,782
210	0,00	59,16	59,16	5,718
190	1,00	31,06	91,06	5,651
170	2,00	5,44	125,44	5,578
150	2,00	42,98	162,98	5,499
130	3,00	23,49	203,49	5,414
110	4,00	7,59	247,59	5,320
90	4,00	56,95	296,95	5,217
70	5,00	52,39	352,39	5,103
50	6,00	58,27	418,27	4,973

График зависимости

4. Всасывание



3.2 Вывод теоретической формулы, численные значения параметров

В этом случае уравнение для изменения объема имеет вид

$\frac{dV}{dt} = -K(z + h_3 - h_4)$, подставляем $z = b_0 V$, получаем

$\frac{dV}{dt} = -K(b_0 V + h_3 - h_4) = -b_0 K(V + V)$, где $V = \frac{h_3 - h_4}{b_0} = 94,5 \text{ см}$.

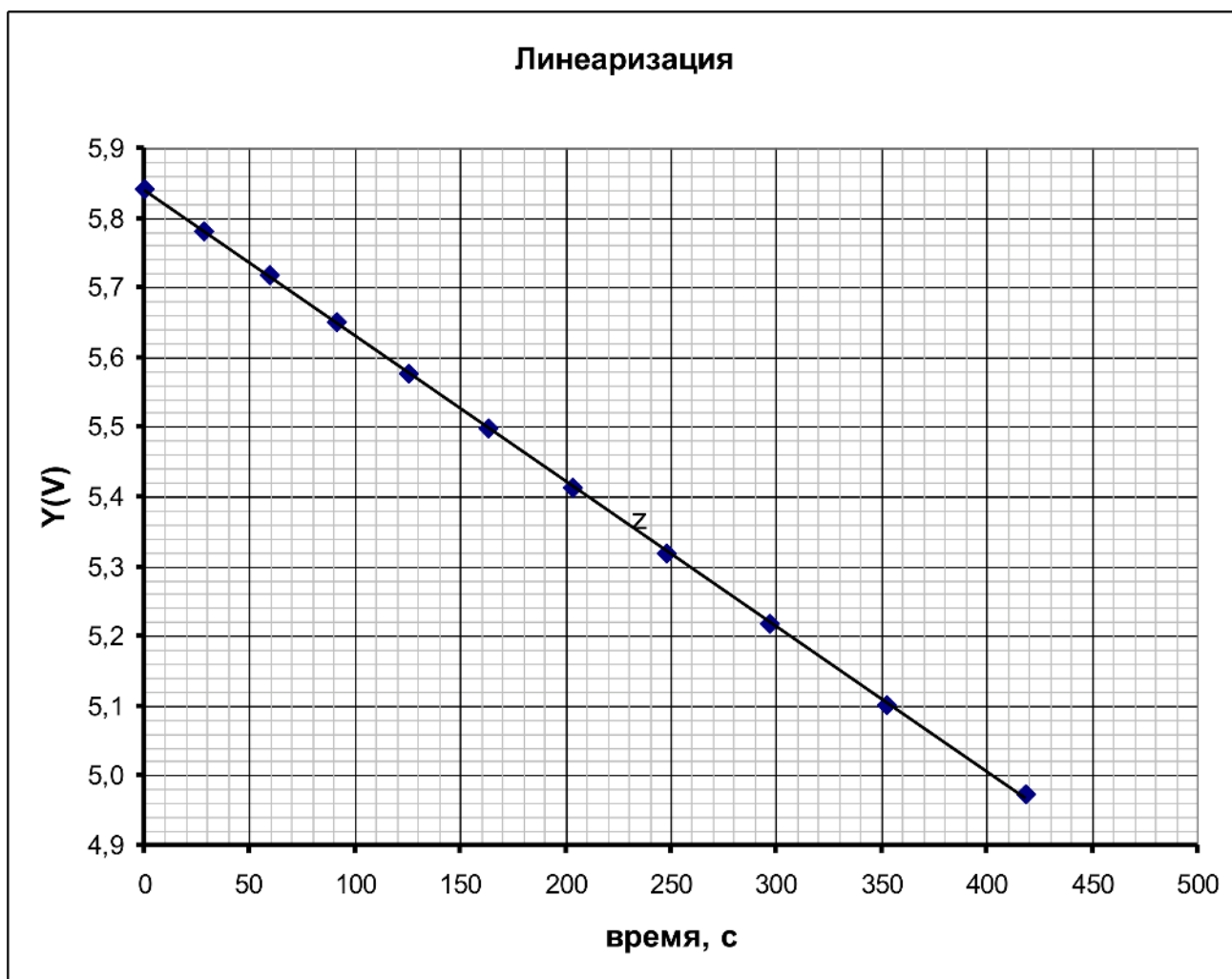
Решение этого уравнения

$$(V + V) = (V_0 + V) \exp(-b_0 K t)$$

Для линеаризации необходимо взять $Y = \ln(V + V)$.

Расчеты в Таблице 4

3.3 График линеаризованной зависимости



3.4 Значение коэффициента K (формула, численное значение)

Из найденного закона изменения объема следует, что

$$\ln(V + V) = \ln(V_0 + V) - b_0 K t.$$

Следовательно, коэффициент наклона линеаризованной зависимости равен

$$a = -b_0 K$$

Поэтому $K = -\frac{a}{b_0}$.

Расчеты дают значения

$$a = -2,09 \cdot 10^{-3} \frac{\text{мл}}{\text{с}}$$

$$K = 2,32 \cdot 10^{-2} \frac{\text{мл}}{\text{с}}$$