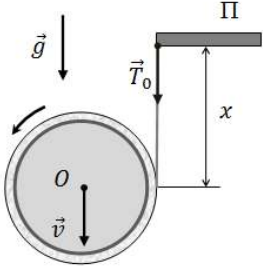


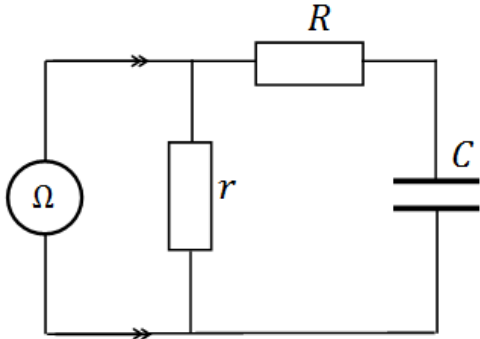
Условие

Задача 1 (10.0 балла) Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

Задача 1.1 (3.0 балла) На легкую цилиндрическую втулку радиусом R плотно намотана тонким слоем фольга толщиной δ , массой m и длиной $L = 10,0$ м. Один конец фольги закреплён на втулке, а другой – на торце тонкой горизонтальной платформы Π . Вначале рулон (втулка с намотанной фольгой) удерживается так, что его ось O горизонтальна и находится на уровне платформы. Рулон отпускают, и он под действием силы тяжести начинает разматываться. Считая $\delta \ll R \ll L$, найдите длину x_0 разматывшейся части фольги, при которой на платформу будет действовать сила T_0 , равная силе тяжести рулона mg . Определите также ускорение a и скорость v падения центра масс рулона в этот момент времени.

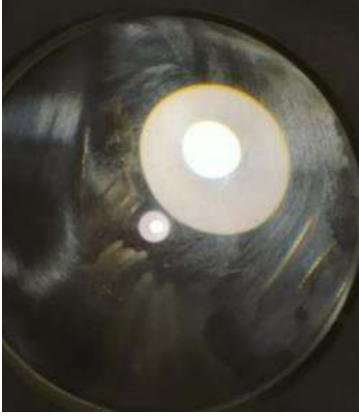


Задача 1.2 (4.0 балла) Показания мультиметра Ω в режиме омметра, подключенного к цепи, с течением времени изменяются по закону $R_\Omega(t) = A - Be^{-t/\tau_0}$, где $A = 100$ кОм, $B = 40$ кОм, $\tau_0 = 100$ с. Определите по этим данным значения сопротивлений r, R и емкость конденсатора C , который в начальный момент не был заряжен. Найдите количество теплоты Q , которое выделяется на сопротивлении R за время измерений $t \gg \tau_0$.



Примечание: мультиметр в режиме омметра измеряет падение напряжения U_x на неизвестном резисторе R_x при пропускании через него фиксированного тока силой $I_0 = 0,1$ мА. На дисплей прибора выводится значение $R_x = U_x/I_0$.

Задача 1.3 (3.0 балла) Наблюдатель (глаз) находится на расстоянии $L = 55$ см от выпукло-вогнутой линзы и рассматривает изображения удаленного уличного фонаря, возникающие за счет отражения от обеих поверхностей линзы (см. фото). Фонарь и глаз расположены вблизи главной оптической оси линзы со стороны вогнутой поверхности. Радиус кривизны вогнутой поверхности равен $r = 7$ см, радиус кривизны выпуклой поверхности составляет $R = 28$ см. При наблюдении видны два изображения фонаря, одно – действительное, другое – мнимое. Отношение видимых угловых размеров этих изображений равно $\gamma = \varphi_1/\varphi_2 = 0,1$, где φ_1 – угловой размер действительного изображения, φ_2 – угловой размер мнимого изображения. Найдите оптическую силу линзы D .



Решение

Задача 1 (10.0 балла) Задача 1.1 (3.0 балла)

Пусть ось x направлена вниз, а начальное положение центра масс рулона соответствует началу координат. Если скорость центра масс рулона в некоторый момент времени равна v , то его кинетическая энергия составляет

$$E_k = \frac{m}{L}(L-x)v^2. \quad (1)$$

С другой стороны, потенциальная энергия рулона относительно начального положения равна

$$E_p = -\frac{m}{L}g\frac{x^2}{2} - \frac{m}{L}g(L-x)x. \quad (2)$$

В начальный момент времени полная энергия равна нулю, поэтому по закону сохранения

$$E_k + E_p = 0, \quad (3)$$

откуда получаем зависимость скорости центра масс рулона от координаты

$$v^2(x) = g \left[x + \frac{x^2}{2(L-x)} \right]. \quad (4)$$

Ускорение рулона определяется выражением

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}, \quad (5)$$

которое после подстановки (4) дает следующую зависимость

$$a(x) = \frac{g}{4} \left[1 + \frac{L^2}{(L-x)^2} \right]. \quad (6)$$

Полный импульс рулона направлен вдоль оси x и равен

$$p = \frac{m}{L}(L-x)v, \quad (7)$$

а значит изменение импульса со временем принимает вид

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{m}{L}v^2 + \frac{m}{L}(L-x)a. \quad (8)$$

По условию задачи сила, действующая на платформу со стороны рулона, равна силе тяжести, а значит на сам рулон полная внешняя сила равна нулю, откуда получаем

$$\frac{dp}{dt} = 0. \quad (9)$$

Решая совместно (4), (6), (8) и (9), получаем квадратное уравнение

$$x + \frac{x^2}{2(L-x)} = \frac{1}{2} \left(L + \frac{x^2}{2(L-x)} \right), \quad (10)$$

положительный корень которого равен

$$x_0 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} L = 4,23 \text{ м}. \quad (11)$$

После подстановки в (4) и (6), соответственно находим

$$v(x_0) = \frac{\sqrt{gL}}{\sqrt[4]{3}} = 7,52 \text{ м/с}, \quad (12)$$

$$a(x_0) = g = 9,80 \text{ м/с}^2. \quad (13)$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $E_k = \frac{m}{L}(L-x)v^2$	0.2
Формула (2): $E_p = -\frac{m}{L}g\frac{x^2}{2} - \frac{m}{L}g(L-x)x$	0.2
Формула (3): $E_k + E_p = 0$	0.1
Формула (4): $v^2(x) = g \left[x + \frac{x^2}{2(L-x)} \right]$	0.2
Формула (5): $a(x) = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}$	0.2
Формула (6): $a(x) = \frac{g}{4} \left[1 + \frac{L^2}{(L-x)^2} \right]$	0.2
Формула (7): $p = \frac{m}{L}(L-x)v$	0.2
Формула (8): $\frac{dp}{dt} = -\frac{m}{L}v^2 + \frac{m}{L}(L-x)a$	0.2
Формула (9): $\frac{dp}{dt} = 0$	0.2
Формула (10): $x + \frac{x^2}{2(L-x)} = \frac{1}{2} \left(L + \frac{x^2}{2(L-x)} \right)$	0.1
Формула (11): $x_0 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} L$	0.2
Численное значение в формуле (11): $x_0 = 4,23 \text{ м}$	0.2
Формула (12): $v(x_0) = \frac{\sqrt{gL}}{\sqrt[4]{3}}$	0.2
Численное значение в формуле (12): $v(x_0) = 7,52 \text{ м/с}$	0.2
Формула (13): $a(x_0) = g$	0.2
Численное значение в формуле (13): $a(x_0) = 9,80 \text{ м/с}^2$	0.2
Итого	3.0

Задача 1.2 (4.0 балла)

В начальный момент времени $t = 0$ конденсатор не заряжен и падения напряжения на подключенных сопротивлениях одинаково, то есть они соединены параллельно, поэтому

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}, \quad (1)$$

а показания омметра составляют

$$R_0 = R(0) = A - B. \quad (2)$$

В момент времени $t = \infty$ конденсатор полностью заряжен и ток через него не течет, поэтому

$$R_{\infty} = r, \quad (3)$$

а показания омметра составляют

$$R_{\infty} = R(\infty) = A, \quad (4)$$

Решая совместно (1)-(4), получаем

$$r = 100 \text{ кОм}, \quad (5)$$

$$R = 150 \text{ кОм}. \quad (6)$$

В произвольный момент времени падение напряжения U_r на сопротивлении r равно падению напряжения U_R на сопротивлении R и падению напряжения U_C на конденсаторе C , то есть

$$U_r = U_R + U_C. \quad (7)$$

С другой стороны по закону Ома

$$U_R = I_C R, \quad (8)$$

$$U_r = I_r r, \quad (9)$$

где I_r – сила тока, протекающего через резистор r , а I_C – сила тока, протекающего через конденсатор C и сопротивление R . Падение напряжения на конденсаторе равно

$$U_C = \frac{q}{C}. \quad (10)$$

Отметим, что зарядка конденсатора происходит вследствие протекания тока I_0 , генерируемого омметром, то есть

$$I_0 = I_r + I_C, \quad (11)$$

а ток, протекающий через конденсатор, равен производной его заряда по времени

$$I_C = \frac{dq}{dt}. \quad (12)$$

Из уравнений (7)-(12), получаем дифференциальное уравнение для q

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau_0} = I_0 \frac{r}{R + r}. \quad (13)$$

решение которого дает силу тока через конденсатор

$$I_C = I_0 \frac{r}{R + r} e^{-t/\tau_0}. \quad (14)$$

Здесь $\tau_0 = C(R + r)$. Таким образом, емкость конденсатора равна

$$C = \frac{\tau_0}{R + r} = 400 \text{ мкФ}. \quad (15)$$

Количество выделяемой на резисторе теплоты определяется законом Джоуля-Ленца и равно
XXII Международная Жаутыковская Олимпиада/Теоретический тур с. 3/11

$$Q = \int_0^\infty I_c^2 R dt = \frac{I_0^2 r^2 R \tau_0}{2(R+r)^2} = 12 \text{ мДж.} \quad (16)$$

Отметим, что в принципе нет необходимости рассматривать отдельно уравнения (1)-(4), для нахождения неизвестных сопротивлений достаточно найти зависимость $R(t)$, которая имеет вид

$$R(t) = \frac{U_r}{I_0} = r - \frac{r^2}{R+r} e^{-t/\tau_0}. \quad (17)$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$	0.2
Формула (2): $R_0 = R(0) = A - B$	0.2
Формула (3): $R_\infty = r$	0.2
Формула (4): $R_\infty = R(\infty) = A$	0.2
Формула (5): $r = 100 \text{ кОм}$	0.2
Формула (6): $R = 150 \text{ кОм}$	0.2
Формула (7): $U_r = U_R + U_C$	0.2
Формула (8): $U_R = I_c R$	0.2
Формула (9): $U_r = I_r r$	0.2
Формула (10): $U_C = \frac{q}{C}$	0.2
Формула (11): $I_0 = I_r + I_C$,	0.2
Формула (12): $I_C = \frac{dq}{dt}$	0.2
Формула (13): $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau_0} = I_0 \frac{r}{R+r}$	0.2
Формула (14): $I_c = I_0 \frac{r}{R+r} e^{-t/\tau_0}$	0.4
Формула (15): $C = \frac{\tau_0}{R+r}$	0.2
Численное значение в формуле (15): $C = 400 \text{ мкФ}$	0.2
Формула (16): $Q = \frac{I_0^2 r^2 R \tau_0}{2(R+r)^2}$	0.4
Численное значение в формуле (16): $Q = 12 \text{ мДж}$	0.2
Итого	4.0

Задача 1.3 (3.0 балла)

Действительное изображение с меньшим угловым размером φ_1 сформировалось в результате отражения на границе «воздух-стекло» на вогнутой поверхности линзы как от вогнутого зеркала с радиусом кривизны r на расстоянии, равном фокусному расстоянию F_1 зеркала

$$\frac{1}{F_1} = \frac{2}{r}, \quad (1)$$

а значит изображение расположено от наблюдателя на расстоянии

$$a_1 = L - F_1. \quad (2)$$

Пусть φ_0 – видимый угловой размер уличного фонаря с места расположения линзы. Тогда линейный размер изображения фонаря в фокусе равен

$$l_1 = \varphi_0 F_1, \quad (3)$$

а значит угловой размер видимого изображения

$$\varphi_1 = \frac{l_1}{a_1}. \quad (4)$$

Второе изображение с большим угловым размером φ_2 – это мнимое изображение фонаря, которое сформировалось в результате отражения на границе «стекло-воздух» от выпуклой поверхности линзы. Учитывая то, что лучи, сформировавшие это изображение, дважды прошли через рассеивающую линзу с оптической силой D , а фокусное расстояние выпуклой поверхности составляет $\frac{R}{2}$, то фокусное расстояние системы равно

$$-\frac{1}{F_2} = 2D + \frac{2}{R}, \quad (5)$$

а само изображение расположено от наблюдателя на расстоянии

$$a_2 = L + F_2. \quad (6)$$

Линейный размер изображения фонаря в фокусе равен

$$l_2 = \varphi_0 F_2, \quad (7)$$

а значит угловой размер видимого изображения

$$\varphi_2 = \frac{l_2}{a_2}. \quad (8)$$

По условию $\gamma = \varphi_1/\varphi_2$, откуда получаем

$$D = \frac{\gamma + 1}{2L} - \frac{1}{R} - \frac{\gamma}{r} = -4 \text{ дптр}. \quad (9)$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $\frac{1}{F_1} = \frac{2}{r}$	0.2
Формула (2): $a_1 = L - F_1$	0.2
Формула (3): $l_1 = \varphi_0 F_1$	0.4
Формула (4): $\varphi_1 = \frac{l_1}{a_1}$	0.4
Формула (5): $-\frac{1}{F_2} = 2D + \frac{2}{R}$	0.2
Формула (6): $a_2 = L + F_2$	0.2
Формула (7): $l_2 = \varphi_0 F_2$	0.4
Формула (8): $\varphi_2 = \frac{l_2}{a_2}$	0.4
Формула (9): $D = \frac{\gamma+1}{2L} - \frac{1}{R} - \frac{\gamma}{r}$	0.2
Численное значение в формуле (9): $D = -4 \text{ дптр}$	0.4
Итого	3.0