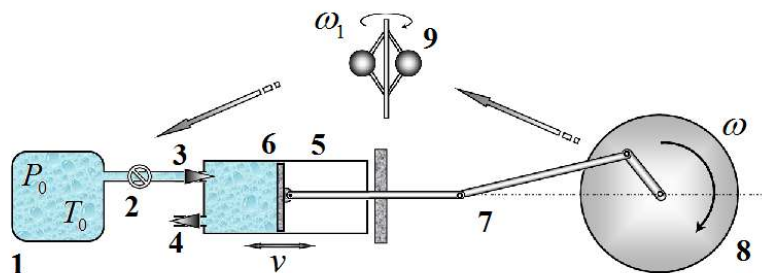


Условие

Задача 2. Паровой двигатель (10.0 балла)

В данной задаче необходимо рассмотреть упрощённую теоретическую модель одного из типов парового двигателя. Отметим, что в настоящее время такой двигатель используется только в качестве технической игрушки.



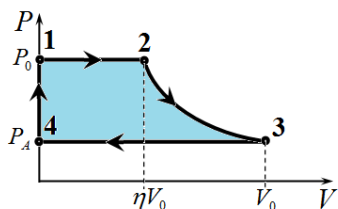
Принципиальная схема рассматриваемого двигателя показана на рисунке выше. Имеется генератор пара **1** (котёл с водой и нагревателем, а также системой дополнительного разогрева пара). Можно считать, что генератор представляет собой большой сосуд, в котором находится водяной пар (без воздуха), давление которого P_0 и температура T_0 поддерживаются постоянными. Нагретый пар по трубе подаётся в рабочий цилиндр **5** с подвижным поршнем **6**. Труба снабжена регулятором подачи пара **2**, управляемым центробежным регулятором Уатта **9**. Рабочий цилиндр имеет два клапана – входной **3** и выходной **4**. Эти клапаны открываются и закрываются при определённых положениях поршня. Подвижный поршень соединён с системой стержней **7**, преобразующих поступательное движение поршня во вращательное движение массивного махового колеса **8**, насаженного на рабочий вал двигателя. С помощью ремённой передачи это колесо соединено с регулятором Уатта, угловая скорость вращения которого ω равна угловой скорости колеса. От частоты вращения регулятора зависит количество пара, проходящего через регулятор подачи пара **2**. Вал махового колеса соединён с рабочим устройством (ради которого и создаются все двигатели).

Во всех частях задачи рассматриваются установившиеся режимы работы, при которых угловые скорости вращения вала и регулятора Уатта остаются постоянными. Разумеется, переход к таким режимам возможен лишь при наличии трения, однако при расчётах установившегося движения его можно не учитывать.

Считайте показатель адиабаты для воды равным $\gamma = 4/3$, молярная масса водяного пара $M = 18,0 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Часть 1. Паровой двигатель без регулятора

Идеальный цикл рассматриваемого двигателя при его бесконечно медленном движении показан на диаграмме P - V . Здесь V – объём части цилиндра между торцом цилиндра и поршнем, занятый паром (далее будем называть его рабочим объёмом); $V_0 = 4,00$ л – максимальный рабочий объём; P – давление пара в этом объёме.

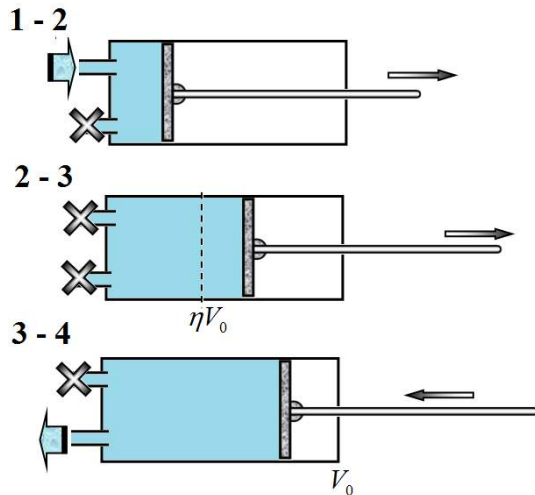


В состоянии **1** поршень касается стенки цилиндра, и рабочий объём равен нулю. Открывается входной клапан, и пар начинает поступать в цилиндр. На участке цикла **1–2** поршень мед-

ленно движется вправо; при этом можно считать, что давление пара в цилиндре всё время равно давлению пара в генераторе $P_0 = 10,0 \cdot 10^5$ Па.

В точке **2**, когда рабочий объём достигает значения ηV_0 , входной клапан закрывается, а поршень продолжает движение вправо под действием давления пара. На участке **2–3** процесс расширения является адиабатическим.

В точке **3** поршень достигает крайнего положения, рабочий объём максимален, а давление падает до атмосферного значения $P_A = 1,00 \cdot 10^5$ Па. После этого открывается выходной клапан, и поршень выталкивает пар в атмосферу.



Когда поршень возвращается в крайнее левое положение, выходной клапан закрывается, и снова открывается входной клапан (участок 4–1).

2.1 Определите значение коэффициента η .

Чтобы исключить конденсацию пара необходимо, чтобы его минимальная температура была выше температуры конденсации при атмосферном давлении $t_S = 100^\circ\text{C}$.

2.2 Определите необходимое значение температуры пара T_0 (в градусах Цельсия), чтобы в процессе расширения его температура не опускалась ниже температуры конденсации t_S .

Далее считайте, что в рассматриваемой модели параметры T_0 и η равны найденным значениям.

2.3 Рассчитайте массу пара m_0 , поступающего в цилиндр за один цикл.

2.4 Рассчитайте работу A_0 , которую совершает двигатель за один цикл.

Далее рассмотрим работу двигателя в реальном режиме с учетом движения поршня с некоторой скоростью. Будем считать, что маховое колесо вращается с постоянной угловой скоростью ω . Строго говоря, в этом случае движение поршня не является равномерным. Однако, приближенно можно считать, что скорость движения поршня в одном направлении постоянна и равна его средней скорости. В данной задаче удобно рассматривать скорость изменения рабочего объема $v = dV/dt$.

2.5 Выразите среднюю скорость изменения рабочего объема цилиндра v через максимальный рабочий объем V_0 и угловую скорость вращения махового колеса ω .

При движении поршня давление пара в цилиндре P на этапе цикла 1-2 будет отличаться от давления пара в генераторе P_0 . Пусть скорость поступления пара пропорциональна разности давлений на регуляторе давления 2, т.е.

$$\frac{dm}{dt} = K(P_0 - P),$$

где K – постоянный коэффициент, задаваемый регулятором 2. В данной части считайте его постоянным и равным $K = K_0 = 4,20 \cdot 10^{-7}$ кг/(Па·с).

Можно считать, что процесс расширения пара на всех этапах цикла является адиабатическим.

2.6 Получите дифференциальное уравнение, описывающее изменение массы газа в цилиндре при открытом входном клапане. В это уравнение помимо искомой функции $m(t)$ должны входить только известные величины.

2.7 Покажите, что при постоянной скорости движения поршня давление пара P в цилиндре остается постоянным.

2.8 Получите алгебраическое уравнение для определения давления пара P в цилиндре на этапе цикла 1-2.

Чтобы приближенно решить полученное уравнение (т.е. найти давление P) сделайте следующее математическое приближение: считайте (только в данном пункте задачи), что показатель адиабаты водяного пара $\gamma \approx 1$. Кроме того, при расчете работы, совершенной паром, пренебрегайте атмосферным давлением.

2.9 Используя указанное приближение, выразите давление пара в цилиндре P на этапе цикла 1-2 через давление P_0 и другие известные параметры задачи.

2.10 Рассчитайте численные значения давления P при угловой скорости вращения вала $\omega = 10,0$ с⁻¹.

2.11 Покажите, что формула для расчета работы A , совершаемой двигателем за один цикл при вращении махового колеса с постоянной угловой скоростью ω , может быть представлена в виде

$$A = \frac{A_0}{1 + \beta \frac{\omega}{K}}.$$

Рассчитайте численные значения параметров A_0 и β в этой формуле.

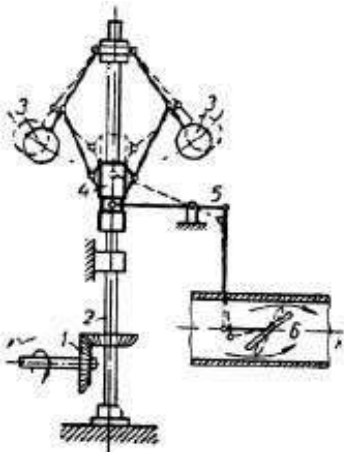
Пусть вал двигателя помимо момента силы M со стороны поршня, действует постоянный момент силы M_0 со стороны рабочего устройства.

2.12 Выразите среднюю установившуюся скорость вращения колеса ω через момент силы M_0 , коэффициент K и параметры A_0 и β .

2.13 Рассчитайте максимальный момент силы M_0 , при котором двигатель может работать.

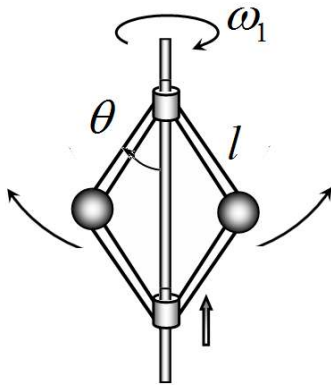
2.14 Постройте схематический график зависимости угловой скорости вращения от момента силы M_0 .

Часть 2. Регулятор без двигателя



Угловая скорость вращения колеса двигателя зависит от момента сил, который передается на рабочее устройство. При уменьшении этого момента силы угловая скорость может резко возрасти, что может привести к аварии и разрушению двигателя. Чтобы избежать такой ситуации используются различные системы автоматической регулировки, одной из которых является центробежный регулятор Уатта.

Принцип его действия достаточно прост. Вращение вала двигателя передается через передачу на вал регулятора. Во время вращения вала регулятора под действием центробежной силы грузики отклоняются от оси, причём чем быстрее вращается вал, тем дальше расходятся грузики. При этом рычаги взаимодействуют с муфтой и перемещают её по оси вала. Через систему рычагов смещение муфты передается на заслонку регулятора подачи пара таким образом, чтобы при повышении скорости вращения вала подача уменьшалась, а при уменьшении – увеличивалась.



Для решения данной задачи технические детали конкретного устройства не существенны. Рассмотрим принципиальную схему работы регулятора. Шарнирная ромбическая рамка закреплена на вертикальном валу, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω . Верхний угол рамки закреплён, нижний может свободно скользить по валу. В боковых углах рамки закреплены два массивных шарика. Можно считать, что при отсутствии вращения вала $\theta = 0$. При вращении вала шарики приподнимаются, отклоняясь на некоторый угол θ от вертикали. Это приводит к тому, что подача пара в рабочий цилиндр уменьшается. Будем считать, что коэффициент K , описывающий скорость подачи пара, связан с углом отклонения простой зависимостью

$$K = K_0 \cos \theta,$$

где K_0 – заданный ранее коэффициент.

Длина стороны рамки равна $l = 20$ см.

2.15 Найдите зависимость угла отклонения шариков от вертикали θ от постоянной угловой скорости вращения ω регулятора.

2.16 Постройте схематический график зависимости коэффициента K от угловой скорости вращения регулятора ω .

Часть 3. Двигатель с регулятором

2.17 Найдите зависимость установившейся скорости вращения вала двигателя от момента силы M_0 с описанной системой регулирования.

2.18 Постройте схематический график полученной зависимости.

Решение

Задача 2. Паровой двигатель (10.0 балла) Часть 1. Паровой двигатель без регулятора

2.1 Запишем уравнение адиабатного процесса

$$PV^\gamma = const \quad (1)$$

Применяя к процессу 2-3, получаем

$$\eta = \left(\frac{P_A}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0,177. \quad (2)$$

2.2 Для определения начальной температуры уравнение адиабаты надо записать в координатах (T, V)

$$TV^{\gamma-1} = const, \quad (3)$$

которое, повторно применяя к процессу 2-3, приводит к следующей формуле

$$T_0 = \frac{T_S}{\eta^{\gamma-1}} = 390 \text{ }^\circ\text{C}. \quad (4)$$

2.3 Уравнения состояния идеального газа для точки 2 имеет вид

$$P_0 \eta V_0 = \frac{m_0}{M} RT_0, \quad (5)$$

которое дает

$$m_0 = M \frac{P_0 \eta V_0}{RT_0} = 2,30 \text{ г}, \quad (6)$$

2.4 На участке 1-2 работа пара равна

$$A_{1-2} = P_0 \eta V_0, \quad (7)$$

а на участке 2-3 работа на адиабате составляет

$$A_{2-3} = P_0 V_0 \frac{\eta - \eta^\gamma}{\gamma - 1}. \quad (8)$$

На участке 3-4 работа отрицательна и равна

$$A_{3-4} = -P_A V_0, \quad (9)$$

поэтому суммарная работа составляет

$$A_0 = P_0 V_0 \left(\eta + \frac{\eta - \eta^\gamma}{\gamma - 1} \right) - P_A V_0 = 1,25 \cdot 10^3 \text{ Дж}. \quad (10)$$

2.5 Рабочий объем достигает максимального значения за половину оборота махового колеса, поэтому средняя скорость изменения объема равна

$$v = \frac{V_0}{\pi/\omega} = \frac{V_0 \omega}{\pi}. \quad (11)$$

2.6 Установим связь между давлением в цилиндре и массой пара в нем. Для этого запишем уравнение адиабатного процесса

$$P_0 V_{in}^\gamma = P V^\gamma, \quad (12)$$

где V_{in} – объем, который занимал пар в генераторе, до того, как он поступил в рабочий цилиндр. Для него справедливо уравнение состояния

$$P_0 V_{in} = \frac{m}{M} R T_0. \quad (13)$$

Тогда давление в цилиндре выражается через массу пара в нем из уравнения адиабатного процесса (12) и уравнения состояния (13) в виде

$$P = P_0 \left(\frac{R T_0}{M P_0} \frac{m}{v t} \right)^\gamma, \quad (14)$$

где $V = v t$ – изменяющийся рабочий объем. С учетом заданного в условии уравнения, получаем искомое уравнение для массы пара в цилиндре имеет вид

$$\frac{dm}{dt} = K(P_0 - P) = K P_0 \left(1 - \left(\frac{R T_0}{M P_0} \frac{m}{v t} \right)^\gamma \right). \quad (15)$$

2.7 Решением уравнения (15), очевидно, является линейная функция

$$m \propto t, \quad (16)$$

а значит в соответствии с формулой (14) давление пара в цилиндре остается постоянным.

2.8 В соответствии с (15) масса газа растет по линейному закону

$$m = K(P_0 - P)t, \quad (17)$$

поэтому из уравнения (15) и соотношения $V = v t$ получаем, что давление газа должно удовлетворять уравнению

$$P = P_0 \left(\frac{R T_0}{M P_0} \frac{\pi K (P_0 - P)}{V_0 \omega} \right)^\gamma. \quad (18)$$

2.9 Теперь используем приближение $\gamma \approx 1$, что позволяет получить формулу для давления в явном виде

$$P = \frac{P_0}{1 + \frac{M V_0 \omega}{\pi K R T_0}}. \quad (19)$$

2.10 Численное значение давления при указанных параметрах равно

$$P = 9,10 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (20)$$

2.11 Работа, совершаемая двигателем за один цикл, может быть рассчитана по формуле (10), в которой давление P_0 следует заменить на значение P , определяемое формулой (19), что приводит к следующему выражению

$$A = P_0 V_0 \frac{\eta + \frac{\eta - \eta^\gamma}{\gamma - 1}}{1 + \frac{M V_0 \omega}{\pi K R T_0}}. \quad (21)$$

Таким образом, параметры этой формулы равны

$$A_0 = P_0 V_0 \left(\eta + \frac{\eta - \eta^\gamma}{\gamma - 1} \right) = 1,44 \cdot 10^3 \text{ Дж}, \quad (22)$$

$$\beta = \frac{M V_0}{\pi R T_0} = 4,16 \cdot 10^{-9} \text{ м} \cdot \text{с}^2. \quad (23)$$

2.12 В установившемся режиме работа пара за цикл равна работе, совершаемой над рабочим устройством

$$\frac{A_0}{1 + \beta \frac{\omega}{K}} = 2\pi M_0. \quad (24)$$

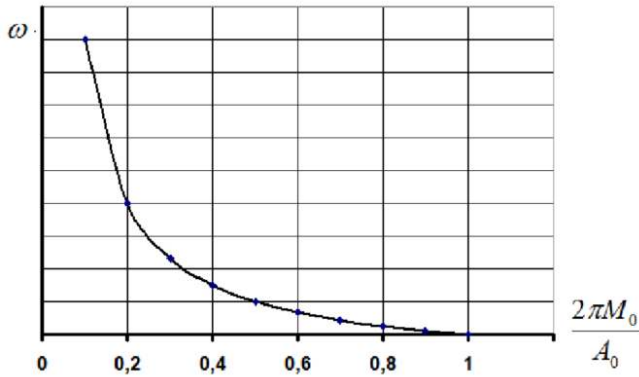
Отсюда следует, что средняя угловая скорость установившегося движения равна

$$\omega = \frac{K}{\beta} \left(\frac{A_0}{2\pi M_0} - 1 \right). \quad (25)$$

2.13 Из формулы (25) следует, что максимальный момент равен

$$M_{0max} = \frac{A_0}{2\pi} = 230 \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (26)$$

2.14 Схематический график зависимости показан на рисунке ниже.



Часть 2. Регулятор без двигателя

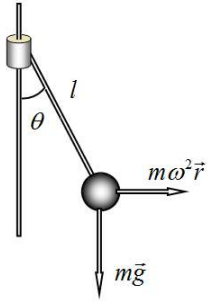
2.15 Проще данную часть задачи решать во вращающейся системе отсчета. В состоянии равновесия момент силы тяжести уравнивается моментом центробежной силы

$$mgl \sin \theta = m\omega^2 l^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (27)$$

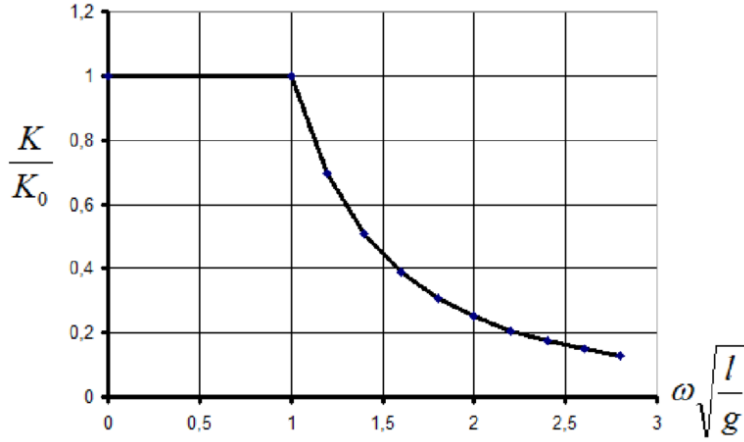
Отсюда следует, что угол отклонения определяется формулой

$$\cos \theta = 1, \quad \omega < \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (28)$$

$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 l}, \quad \omega \geq \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (29)$$



2.16 График зависимости показан на рисунке ниже.

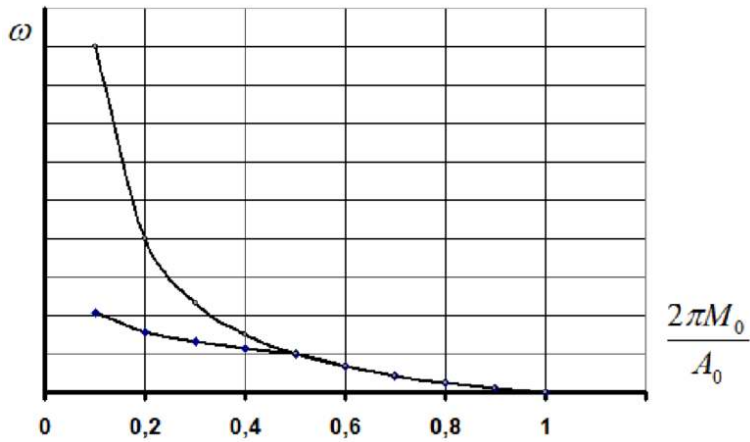


Часть 3. Двигатель с регулятором

2.17 Учитывая, что $K = K_0 \cos \theta$ и принимая во внимание (19), получаем после подстановки в (25)

$$\omega = \sqrt[3]{\frac{K_0 g}{\beta l} \left(\frac{A_0}{2\pi M_0} - 1 \right)}. \quad (30)$$

2.18 Схематический график зависимости показан на рисунке ниже.



	Содержание	Баллы	
2.1	Формула (1): $PV^\gamma = const$	0.2	0.6
	Формула (2): $\eta = \left(\frac{P_A}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$	0.2	
	Численное значение в формуле (2): $\eta = 0,177$	0.2	
2.2	Формула (3): $TV^{\gamma-1} = const$	0.2	0.6
	Формула (4): $T_0 = \frac{T_S}{\eta^{\gamma-1}}$	0.2	
	Численное значение в формуле (4): $T_0 = 390 \text{ }^\circ\text{C}$	0.2	
2.3	Формула (6): $m_0 = M \frac{P_0 \eta V_0}{RT_S}$	0.2	0.4
	Численное значение в формуле (6): $m_0 = 2,30 \text{ г}$	0.2	
2.4	Формула (7): $A_{1-2} = P_0 \eta V_0$	0.2	1.0
	Формула (8): $A_{2-3} = P_0 V_0 \frac{\eta - \eta^\gamma}{\gamma - 1}$	0.2	
	Формула (9): $A_{3-4} = -P_A V_0$	0.2	
	Формула (10): $A_0 = P_0 V_0 \left(\eta + \frac{\eta - \eta^\gamma}{\gamma - 1} \right) - P_A V_0$	0.2	
	Численное значение в формуле (10): $A_0 = 1,25 \cdot 10^3 \text{ Дж}$	0.2	
2.5	Формула (11): $v = \frac{V_0 \omega}{\pi}$	0.2	0.2
2.6	Формула (12): $P_0 V_{in}^\gamma = PV^\gamma$	0.2	1.0
	Формула (13): $P_0 V_{in} = \frac{m}{M} RT_0$	0.2	
	Формула (14): $P = P_0 \left(\frac{RT_0}{MP_0} \frac{m}{vt} \right)^\gamma$	0.2	
	Формула (15): $\frac{dm}{dt} = KP_0 \left(1 - \left(\frac{RT_0}{MP_0} \frac{m}{vt} \right)^\gamma \right)$	0.4	
2.7	Формула (16): $m \propto t$	0.4	0.6
	Ссылка на формулу (14) или (15)	0.2	
2.8	Формула (17): $m = K(P_0 - P)t$	0.2	0.6
	Формула (18): $P = P_0 \left(\frac{RT_0}{MP_0} \frac{\pi K(P_0 - P)}{V_0 \omega} \right)^\gamma$	0.4	
2.9	Формула (19): $P = \frac{P_0}{1 + \frac{MV_0 \omega}{\pi K RT_0}}$	0.2	0.2
2.10	Численное значение в формуле (20): $P = 9,10 \cdot 10^5 \text{ Па}$	0.2	0.2
2.11	Формула (21): $A = P_0 V_0 \frac{\eta + \frac{\eta - \eta^\gamma}{\gamma - 1}}{1 + \frac{MV_0 \omega}{\pi K RT_0}}$	0.2	1.0
	Формула (22): $A_0 = P_0 V_0 \left(\eta + \frac{\eta - \eta^\gamma}{\gamma - 1} \right)$	0.2	
	Численное значение в формуле (22): $A_0 = 1,44 \cdot 10^3 \text{ Дж}$	0.2	
	Формула (23): $\beta = \frac{MV_0}{\pi RT_0}$	0.2	
	Численное значение в формуле (23): $\beta = 4,16 \cdot 10^{-9} \text{ м} \cdot \text{с}^2$	0.2	
2.12	Формула (24): $\frac{A_0}{1 + \beta \frac{\omega}{K}} = 2\pi M_0$	0.4	0.6
	Формула (25): $\omega = \frac{K}{\beta} \left(\frac{A_0}{2\pi M_0} - 1 \right)$	0.2	
2.13	Формула (26): $M_{0max} = \frac{A_0}{2\pi}$	0.4	0.6
	Численное значение в формуле (26): $M_{0max} = 230 \text{ Н} \cdot \text{м}$	0.2	
2.14	График:		0.4
	обращается в ноль при превышении максимального момента	0.1	
	указан максимальный момент	0.1	
	монотонное возрастание при моменте, стремящемся к нулю	0.2	
2.15	Формула (27): $mg l \sin \theta = m \omega^2 l^2 \sin \theta \cos \theta$	0.2	1.0

	Формула (28): $\cos \theta = 1, \quad \omega < \sqrt{\frac{g}{l}}$	0.4	
	Формула (29): $\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 l}, \quad \omega \geq \sqrt{\frac{g}{l}}$	0.4	
2.16	График: есть горизонтальный участок указано значение K_0 на горизонтальном участке монотонное стремление к нулю при возрастании угловой скорости	0.1 0.1 0.2	0.4
2.17	Формула (30): $\omega = \sqrt{\frac{K_0 g}{\beta l} \left(\frac{A_0}{2\pi M_0} - 1 \right)}$	0.4	0.4
2.18	График: есть точка излома на первом участке убывает медленнее, чем на втором	0.1 0.1	0.2
Итого			10.0