

Условие

Задача 3. Электронный парамагнитный резонанс (10.0 баллов)

Магнитный момент

Магнитный момент $\mathbf{m}$ плоского контура с током — это векторная величина, определяемая как произведение силы тока I , площади контура S и единичного вектора нормали $\mathbf{n}$, перпендикулярного плоскости контура:

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{n}.$$

Направление вектора магнитного момента устанавливается по правилу буравчика: если вращать ручку буравчика в направлении тока в контуре, то поступательное движение буравчика покажет направление $\mathbf{m}$.

3.1 По круговому витку радиуса R протекает электрический ток, при этом виток обладает магнитным моментом $\mathbf{m}$. Найдите индукцию магнитного поля $\mathbf{B}_0$ в центре витка.

3.2 Тот же виток помещается во внешнее однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$ так, что вектор магнитного момента составляет угол φ с направлением $\mathbf{B}$. Найдите модуль механического момента сил $\mathbf{M}$, действующего на виток со стороны внешнего магнитного поля.

3.3 Виток медленно поворачивается во внешнем однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ так, что направление его магнитного момента $\mathbf{m}$ изменяется от положения, когда $\mathbf{m}$ направлен по полю ($\mathbf{m} \uparrow \uparrow \mathbf{B}$), до положения, когда $\mathbf{m}$ направлен против поля ($\mathbf{m} \uparrow \downarrow \mathbf{B}$). Найдите механическую работу A сил со стороны магнитного поля при таком повороте.

Электронный парамагнитный резонанс

Если заряженная частица вращается или движется по замкнутой траектории, то у неё имеется механический момент, а вместе с ним возникает и магнитный момент. При этом выполняется универсальное гиромагнитное отношение, которое показывает, как связаны между собой магнитный и механический момент частицы.

Пусть электрон в атоме движется по круговой орбите так, что его орбитальный момент импульса относительно центра равен $\mathbf{L}$. Такое движение можно рассматривать как эквивалент кругового электрического тока, который обладает магнитным моментом $\mathbf{m}$. Между магнитным моментом и моментом импульса выполняется гиромагнитное соотношение

$$\mathbf{m} = -g_L \frac{e}{2m_e} \mathbf{L},$$

где e — элементарный заряд, m_e — масса электрона, а g_L — так называемый множитель Ландэ.

3.4 Найдите множитель Ландэ g_L для кругового орбитального движения электрона.

Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР) — это явление, при котором вещество с неспаренными электронами поглощает электромагнитное излучение (обычно СВЧ-диапазона), если оно находится в постоянном магнитном поле. Такое поглощение происходит не всегда, а только при строго определенной частоте, поэтому его называют резонансным.

Представим, что атом содержит во внешней оболочке один неспаренный электрон с нулевым орбитальным моментом. У такого электрона есть собственный момент вращения — спин. Когда образец с веществом помещается в постоянное магнитное поле соленоида с индукцией B , то относительно него спин может ориентироваться двумя способами: вдоль направления магнитного поля с проекцией момента импульса $+\hbar/2$, или против него с проекцией $-\hbar/2$. Эти два положения обладают разной энергией, поэтому между ними возможен переход. В дальнейшем считайте, что множитель Ландэ для спина g_S в два раза больше, чем для орбитального движения электрона. Образец облучают электромагнитной волной с фиксированной

круговой частотой ω , которая может заставить электрон переходить между двумя состояниями с разными проекциями спина, а затем медленно меняют величину индукции внешнего магнитного поля, фиксируя изменение интенсивности поглощения электромагнитных волн.

3.5 Найдите частоту внешнего электромагнитного излучения ω и рассчитайте ее численное значение, если максимум поглощения пришелся на индукцию магнитного поля $B_0 = 350$ мТл. Теперь атомы того же типа внедрены в неизвестное вещество, из которого изготовлен сердечник для соленоида.

3.6 Указанное в предыдущем пункте магнитное поле достигалось при силе тока в обмотке соленоида $I_0 = 1,50$ А. Определите новое значение силы тока I в обмотке соленоида для резонансного поглощения, если магнитная проницаемость неизвестного вещества равна $\mu = 1,25$.

Термодинамическое равновесие

Пусть сердечник, помещенный в тоже самое магнитное поле, находится в состоянии термодинамического равновесия при температуре $T = 50$ К, а полное число внедренных атомов составляет $N = 1,00 \cdot 10^{20}$. Обозначим через n_0 разность между количеством атомов, находящихся на нижнем N_1 и верхнем N_2 энергетических уровнях.

3.7 Рассчитайте n_0 при заданных условиях.

При взаимодействии электромагнитного поля с веществом происходят три процесса:

1) Поглощение – атом с более низкого энергетического уровня E_1 переходит на более высокий уровень E_2 с поглощением фотона, при этом количество переходов с нижнего уровня в единицу времени определяется выражением:

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12}\rho N_1,$$

где ρ – плотность электромагнитного излучения;

2) Вынужденное излучение – под действием внешнего фотона атом с более высокого энергетического уровня E_2 переходит на более низкий уровень E_1 с излучением другого фотона, при этом количество переходов с верхнего уровня в единицу времени определяется выражением:

$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}\rho N_2;$$

3) Спонтанный переход – самопроизвольный переход атома с верхнего на нижний уровень с испусканием фотона, при этом количество переходов с верхнего уровня в единицу времени определяется выражением:

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2.$$

Константы B_{12} , B_{21} , A_{21} называются коэффициентами Эйнштейна. Планк показал, что в состоянии термодинамического равновесия плотность энергии равновесного электромагнитного излучения описывается формулой:

$$\rho = \frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3} \frac{1}{\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}.$$

3.8 Докажите, что $B_{12} = B_{21}$.

Наличие внешнего источника микроволнового поля

В начальный момент времени система находится в термодинамическом равновесии при указанной выше температуре. Затем включается источник микроволнового излучения таким

образом, чтобы плотность электромагнитного излучения ρ в образце оставалась постоянной во времени, а ее величина такова, что спонтанными переходами в системе можно пренебречь.

3.9 Найдите аналитическую зависимость разности $n(t)$ между количеством атомов, находящихся на нижнем и верхнем энергетических уровнях, в зависимости от времени t , считая, что $k = B_{12}\rho$.

3.10 Известно, что разность между количеством атомов, находящихся на нижнем и верхнем энергетических уровнях, через время $\tau = 1,00$ с после включения источника изменилась ровно в 2 раза. Рассчитайте при данных условиях мощность микроволнового источника излучения в начальный момент времени.

В действительности поглощение и вынужденное излучение не являются единственными процессами, в результате которых электрон, находящийся на верхнем уровне, теряет свою избыточную энергию. Большую роль играют процессы релаксации, в результате которых избыток энергии передается окружающему веществу, ведь именно благодаря им осуществляется равновесное распределение по энергетическим уровням.

Процесс релаксации для уровня 1 выглядит как непрерывные переходы с уровня 1 на уровень 2 и обратно, тоже самое справедливо для уровня 2. При этом члены, описывающие релаксацию для уровня 1, записываются через константы α_1 и α_2 следующим образом

XXII Международная Жаутоковская Олимпиада/Теоретический тур с. 8/8

$$\frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2,$$

а, следовательно, аналогичное соотношение можно записать и для уровня 2.

3.11 Пусть для данного вещества $\alpha_1 + \alpha_2 = 0,670 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Рассчитайте при данных условиях мощность микроволнового источника излучения в установившемся режиме измерения спектра методом электронного парамагнитного резонанса.

Математическая подсказка для задач теоретического тура

Вам может понадобиться знание следующих формул: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$ — константа, C — произвольная постоянная;

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, где C — произвольная постоянная;

$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$, где a — константа, C — произвольная постоянная;

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}x^2, \text{ для } |x| \ll 1 \text{ и любых } \gamma;$$

$$\tan x \approx \sin x \approx x, \text{ для } |x| \ll 1;$$

$$\ln(1+x) \approx x, \text{ для } |x| \ll 1.$$

Список физических констант

Ускорение свободного падения $g = 9,80 \text{ м/с}^2$;

Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$;

Скорость света в вакууме $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$;

Приведенная постоянная Планка $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$;

Постоянная Больцмана $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$;

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$;

Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$;

Постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$;

Элементарный заряд $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл;
Масса электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг.