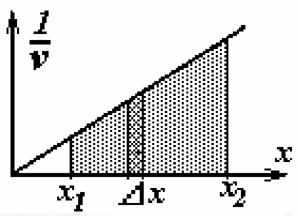
$$t = \int_{t_1}^{t_2} dt = \left\{ \begin{aligned} dt &= \frac{dx}{\upsilon} = \frac{xdx}{b} \\ \upsilon &= \frac{b}{x} \end{aligned} \right\} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{xdx}{b} = \frac{1}{b} \frac{x^2}{2} \Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2b}. \qquad (1)$$

Для решения задачи без применения интегрирования, необходимо построить график зависимости величины, обратной скорости, от расстояния, т.е. зависимость $\frac{1}{v}(x)$:

$$\frac{1}{v}(x) = \frac{x}{b}$$



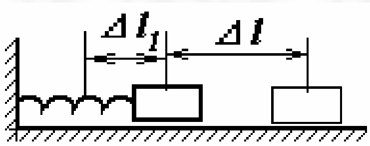
Рассматривая отмеченный на рисунке элементарный столбик, видим, что его площадь численно равна времени, которое требуется, чтобы преодолеть участок пути Δx_i

$$\Delta t_i = \Delta x_i \cdot \frac{1}{v_i} = \Delta x_i \cdot \left(\frac{x_i}{b}\right);$$

Таким образом, площадь трапеции, затонированной на рисунке, и даст нам искомое время движения тела:

$$t = \sum_i \Delta t_i = \sum \Delta S_i = (x_2 - x_1)\frac{1}{2}\left(\frac{x_2 + x_1}{b}\right) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2b}.$$

10-5. Для решения задачи воспользуемся законом сохранения энергии с учетом отрицательной работы силы трения. Предположим, что, миновав положение равновесия, груз остановился на расстоянии Δl_1 от него. Понятно, что $\Delta l_1 < \Delta l,$ т.к. работа силы трения уменьшила механическую энергию системы пружина – брусок (пружинного маятника). Работа силы трения при таком перемещении:



$$A_{mp} = -\mu mg(\Delta l + \Delta l_1)$$

Она же равна изменению механической энергии системы:

$$A_{mp} = \Delta E^{мех} = E_2^{мех} - E_1^{мех} \Rightarrow E_1^{мех} = E_2^{мех} - A_{mp}.$$

Раскрывая выражение для механической энергии получаем:

$$\frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{k\Delta l_1^2}{2} + \mu mg(\Delta l + \Delta l_1). \qquad (1)$$

Преобразовав (1) к виду:

$$\frac{k}{2}\left(\Delta l^2 - \Delta l_1^2\right) = \frac{k}{2}\left(\Delta l - \Delta l_1\right)\left(\Delta l + \Delta l_1\right) = \mu mg\left(\Delta l_1 + \Delta l\right),$$

найдем

$$\Delta l_1 = \Delta l - \frac{2\mu mg}{k} \qquad (2)$$

Представляя в (2) численные значения, получаем: $\Delta l_1 = 7{,}3 см$.

Рассуждая далее аналогично, заметим, что соотношение (3) сохранится и в последующем движении, только роль Δl будет играть уже Δl_1. Таким образом, после следующего колебания он отклонится от уже на $\Delta l_2 = 6{,}3 см$ и т.д.

Однако при малых отклонениях возможна ситуация, когда сила трения покоя сможет удержать груз на некотором расстоянии Δl^*

$$\Delta l^* \le \frac{\mu mg}{k} = 0{,}5 см. \qquad (3)$$

Это обстоятельство приведет к тому, что пройдя из положения $\Delta l_7 = 1{,}3 см$ в положение $\Delta l_8 = 0{,}3 см$ груз замрет в этом положении и не сможет вернуться в точку равновесия. Таким образом, будучи отведенным вправо, груз совершит 8 «переходов» через начальное положение и остановится в 0,3 см правее его.

Анализируя (3) видим, что поведенный вариант решения справедлив при слабом трении, т.е. когда:

$$\Delta l >> \frac{2\mu mg}{k}.$$

Например, при $\Delta l = \dfrac{2\mu mg}{k}$, груз вернется точно в положение равновесия и остановится там. А что будет в случае, если

$$\frac{\mu mg}{k} < \Delta l < \frac{2\mu mg}{k}.$$

Здесь, при решении необходимо учесть, что груз может остановиться и не дойдя до положения равновесия, т.е. закон сохранения энергии примет несколько иной вид:

$$\frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{k\Delta l_1^2}{2} + \mu mg(\Delta l - \Delta l_1)$$

(сравните с (1)).

Откуда следует, что:

$$\Delta l_1 = \frac{2\mu mg}{k} - \Delta l.$$

В этом случае груз остановится на расстоянии Δl_1, так ни разу добравшись до положения равновесия.

Наконец, если начальное смещение таково, что

$$\Delta l < \frac{\mu mg}{k},$$

то груз не сдвинется с места, поскольку силы трения покоя удержит его.

Подобные затухающие механические колебания отражают общие закономерности затухающих колебаний: их энергия переходит в теплоту (или иные формы энергии), предельное смещение после каждого колебания уменьшается по отношению к предыдущему, период этих колебаний больше периода свободных колебаний (из-за тормозящего действия силы трения).

11-1. Рассмотрим движение пузырька в вертикально расположенной трубке. Обудет подниматься под действием силы Архимеда:

$$F_A = \rho g V, \qquad (1)$$

где ρ - плотность глицерина, V - объем пузырька, g - ускорение свободного падения.

Так как глицерин достаточно вязкая жидкость, то на пузырек будет действовать сила вязкого трения, пропорциональная скорости движение пузырька v -

$$F_c = -\beta v, \qquad (2)$$

где β - коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров пузырька и вязкости глицерина. Таким образом, на основании второго закона Ньютона можно записать

$$ma = F_A - F_c - mg = \rho g V - \beta v - mg, \qquad (3)$$

где m - масса пузырька. Очевидно, что она крайне мала, поэтому можно положить ее равной нулю. Тогда из (3) следует, что подъем пузырькм будет проходить с постоянной скоростью

$$v_0 = \frac{\rho V}{\beta} g = kg, \qquad (4)$$

где k - постоянный для данного пузырька коэффициент. Причем его значение можно найти используя приведенные в условии данные $k = v_0 / g$.

Рассмотрим движение пузырька в горизонтальной трубке, в системе отсчета, связанной с самой трубкой. Во время разгона эта система отсчета является неинерциальной, на пузырек и на глицерин действует сила инерции. Так как сила инерции пропорциональна массе тела, то ее действие полностью подобно действию силы тяжести, и уравнения, описывающие движение в такой системе отсчета, будут аналогичны уравнениям движения в поле тяжести, если только ускорение свободного падения заменить на величину - $(-a)$, где a - ускорение системы отсчета относительно какой