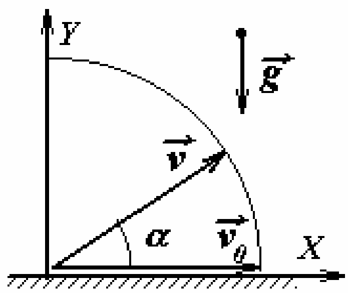
Гродно 1991г. (Решения)

9-1. Хорошо известно, что максимальная дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, достигается при угле вылета равном 45^o и определяется формулой

$$S = \frac{v_0^2}{g}. \qquad (1)$$

Из этой формулы можно найти скорость, которую катапульта сообщает камню

$$v_0 = \sqrt{gS} = 15 м/с.$$



Рассмотрим теперь полет камня, выпущенного из движущейся катапульты. Введем систему координат, оси которой: X — направлена горизонтально, а Y — вертикально. Начало координат совместим с положением катапульты в момент вылета камня.

Для вычисления вектора скорости камня необходимо учесть горизонтальную скорость движения катапульты $v = v_0$ Допустим, что катапульта выбрасывает камень под углом α к горизонту. Тогда компоненты начальной скорости камня в нашей системе координат могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} v_{x0} &= v_0 + v_0 \cos\alpha \\ v_{y0} &= v_0 \sin\alpha \end{aligned}. \qquad (2)$$

Закон движения камня имеет вид

$$\begin{aligned} x &= v_{x0}t = v_0(1 + \cos\alpha)t \\ y &= v_{y0}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}. \qquad (3)$$

Из второго уравнения системы (3) найдем время полета, положив $y = 0,$

$$\tau = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (4)$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы (3), получим дальность полета камня

$$S_1 = v_0\left(1 + \cos\alpha\right)\frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (5)$$

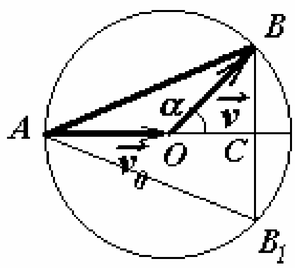
Отвлечемся немного от решения данной конкретной задачи и порассуждаем о полученном выражении. Во-первых, если катапульта неподвижна ($v = 0$), то формула (5) переходит в известное выражение для дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью под углом α к горизонту

$$S' = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}. \qquad (6)$$

Во-вторых, из (5) совсем не следует, что S_1 будет максимально при $\alpha = 45^0$ (это справедливо для (6), когда $v = 0$).

Предлагая эту задачу на республиканскую олимпиаду, авторы были убеждены, что девять десятых участников получат формулу (5) и затем подставят в нее значение $\alpha = 45^0$. Однако, к нашему сожалению, мы ошиблись: ни один из олимпийцев не усомнился в том, что максимальная дальность полета всегда (!) достигается при угле вылета, равном 45^o. Этот широко известный факт имеет ограниченные рамки применимости: он справедлив только, если: а) не учитывать сопротивление воздуха; б) точка вылета и точка падения находятся на одном уровне; в) метательный снаряд неподвижен.

Вернемся к решению задачи.Итак, нам необходимо найти значение угла α, при котором S_1, определяемое формулой (5), максимально. Можно, конечно, найти экстремум функции, используя аппарат дифференциального исчисления: найти производную, положить ее равной нулю и, решив полученное уравнение, найти искомое значение α. Однако учитывая, что задача была предложена ученикам 9-х классов, мы дадим ее геометрическое решение. Воспользуемся тем обстоятельством, что $v = v_0 = 15 м / с$.

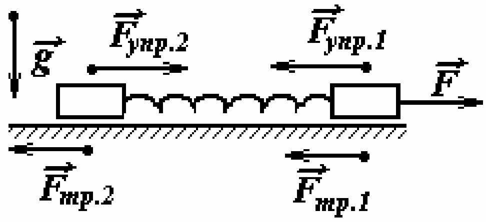


Расположим векторы $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$ как показано на рис. Так как их длины равны, то вокруг них можно описать окружность с центром в точке *O*. Тогда длина отрезка *AC* равна $v_0 + v_0 \cos\alpha$ (это есть v_{x0}), а длина отрезка *BC* равна $v_0 \sin\alpha$ (это v_{y0}). Их произведение равно удвоенной площади треугольника *ABC*, или площади треугольника ABB_1. Обратите внимание, что именно произведение $v_{x0}v_{y0}$ входит в выражение для дальности полета (5). Иными словами, дальность полета равна произведению площади ΔABB_1 на постоянный множитель $\frac{2}{g}$. А теперь зададимся вопросом: какой из вписанных в данную окружность треугольников имеет максимальную площадь? Естественно, правильный! Поэтому искомое значение угла $\alpha = 60^0$.

Вектор $\vec{AB}$ есть вектор полной начальной скорости камня, он направлен под углом 30^o к горизонту (опять же отнюдь не 45^o).

Таким образом, окончательное решение задачи следует из формулы (5), в которую следует подставить $\alpha = 60^0$.

$$S_1 = \frac{2v_0^2}{g}\left(1 + \cos 60^o\right)\sin 60^o = S\frac{3\sqrt{3}}{2} = 58{,}5\,м.$$



9-2. Для того, чтобы сдвинуть тело 2 с места, необходимо приложить к нему горизонтально силу, которая превышает максимальную силу трения покоя, которая в данном случае равна

$$F_{тр.2} = \mu mg. \qquad (1)$$

В качестве силы, которая сдвигает это тело, выступает сила упругости пружин, модуль которой, согласно закону Гука, равен

$$F_{упр.} = k\Delta x, \qquad (2)$$

где k — жесткость пружины, Δx — ее удлинение.

Таким образом, необходимо удлинить пружину (т. е. сдвинуть тело 1) на величину

$$\Delta x = \frac{\mu mg}{k}. \qquad (3)$$

Если мы приложим к телу 1 постоянную силу $F,$ таким образом его движение не будет равноускоренным, так как на него действует, помимо постоянной силы трения $F_{тр.} = \mu mg,$ сила упругости $F_{упр.} = k\Delta x,$ которая не является постоянной. Качественно движение тела 1, при неподвижном теле 2, можно описать следующим образом. Если сила $\vec{F}$ по модулю превышает силу трения $\vec{F}_{тр.1},$ то тело начнет двигаться с положительным ускорением, при этом сила