10-1. Воспользуемся законом Ома в дифференциальной форме и запишем плотность тока у поверхности шарика

$$j = \frac{E}{\rho}, \qquad (1)$$

где $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ — напряженность электрического поля у поверхности шарика, q — его заряд, R — радиус.

Сила тока, стекающего с шарика,

$$I = j \cdot S = \frac{q}{\varepsilon_0 \rho},$$

где $S = 4\pi R^2$ – площадь поверхности шарика.

Сила тока — есть скорость изменения заряда шарика $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$. Как следует из (2), сила тока не является постоянной, а зависит от заряда шарика. Однако, для получения оценки времени исчезновения заряда, можно положить ее постоянной и равной $I_0 = \dfrac{q_0}{\varepsilon_0 \rho}$, где q_0 — начальный заряд шарика. Тогда время разряда оценивается по формуле

$$\tau = \frac{q_0}{I_0} = \varepsilon_0 \rho.$$

Отметим, что эта оценка впервые получена Дж.К.Максвеллом и носит название максвелловское время релаксации. Можно показать, что за это время заряд уменьшается в $e = 2.71828\ldots$ раз.

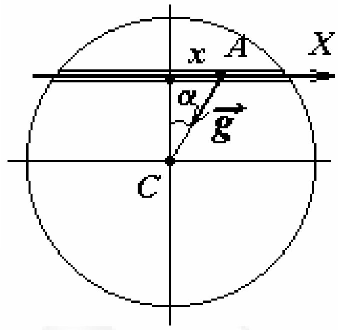
10-2. При движении вагона внутри туннеля сила тяжести вагона будет изменяться при изменении расстояния до центра Земли. Найдем ускорение свободного падения g в точке, находящейся на расстоянии r до центра Земли. Слои, находящиеся на большем расстоянии от центра не будут вносить вклад в величину силы тяжести. Поэтому по закону всемирного тяготения

$$mg = G\frac{m}{r^2}\frac{4}{3}\pi\rho r^3 = \frac{4\pi}{3}Gmr\rho, \qquad (1)$$

где ρ — средняя плотность Земли, G — гравитационная постоянная. Учитывая, что на поверхности Земли ускорение свободного падения равно $g_0 = 9{,}8 м/с^2$, из (1) можно записать

$$g = g_0 \frac{r}{R}, \qquad (2)$$

где R — радиус Земли.



Пусть ось X направлена вдоль туннеля, начало отсчета совместим с его центром. Тогда в точке А, находящейся на расстоянии $r = |AC|$ от центра Земли, ускорение вагона может быть найдено из второго закона Ньютона

$$ma = -mg \sin\alpha, \qquad (3)$$

учитывая (1), получим

$$a = -g_0 \frac{r}{R} \sin\alpha = -\frac{g_0}{R} x, \qquad (4)$$

где $x = r \sin\alpha$ координата точки A. (4) есть уравнение гармонических колебаний, с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}},$$

Время движения в одну сторону τ равно половине периода колебаний, т.е.

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} \approx 2540 с \approx 40 мин. \qquad (5)$$

Интересно заметить, что это время остается одним и тем же для любых точек, находящихся на поверхности Земли и соединенных прямым туннелем.

10-3. Так как площадь поперечного сечения трубы S постоянна, то объем воздуха под поршнем пропорционален длине воздушного столба x, давление пропорционально расстоянию до поверхности воды. Считая процесс расширения изотермическим, из закона Бойля-Мариотта можно записать

$$\rho g h S x_0 = \rho g (h - x) S x, \qquad (1)$$

где $\rho g h$ — давление воздуха при горизонтальном положении трубы, $\rho g (h - x)$ — давление воды на поршень, когда труба поднята вертикально. Уравнение (1) перепишем в виде

$$x^2 - hx + hx_0 = 0. \qquad (2)$$

Его корни

$$x_{1,2} = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - hx_0}. \qquad (3)$$