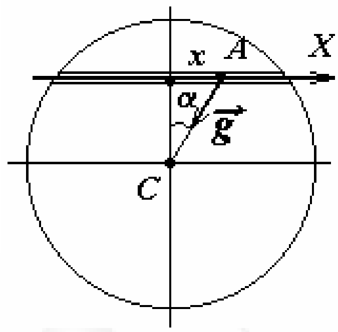
$$g = g_0 \frac{r}{R}, \qquad (2)$$

где R — радиус Земли.

Пусть ось X направлена вдоль туннеля, начало отсчета совместим с его центром. Тогда в точке А, находящейся на расстоянии $r = |AC|$ от центра Земли, ускорение вагона может быть найдено из второго закона Ньютона



$$ma = -mg \sin\alpha, \qquad (3)$$

учитывая (1), получим

$$a = -g_0 \frac{r}{R} \sin\alpha = -\frac{g_0}{R} x, \qquad (4)$$

где $x = r \sin\alpha$ координата точки A. (4) есть уравнение гармонических колебаний, с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}},$$

Время движения в одну сторону τ равно половине периода колебаний, т.е.

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} \approx 2540 c \approx 40 мин. \qquad (5)$$

Интересно заметить, что это время остается одним и тем же для любых точек, находящихся на поверхности Земли и соединенных прямым туннелем.

10-3. Так как площадь поперечного сечения трубы S постоянна, то объем воздуха под поршнем пропорционален длине воздушного столба x, давление пропорционально расстоянию до поверхности воды. Считая процесс расширения изотермическим, из закона Бойля-Мариотта можно записать

$$\rho g h S x_0 = \rho g (h - x) S x, \qquad (1)$$

где $\rho g h$ — давление воздуха при горизонтальном положении трубы, $\rho g (h - x)$ — давление воды на поршень, когда труба поднята вертикально. Уравнение (1) перепишем в виде

$$x^2 - hx + hx_0 = 0. \qquad (2)$$

Его корни

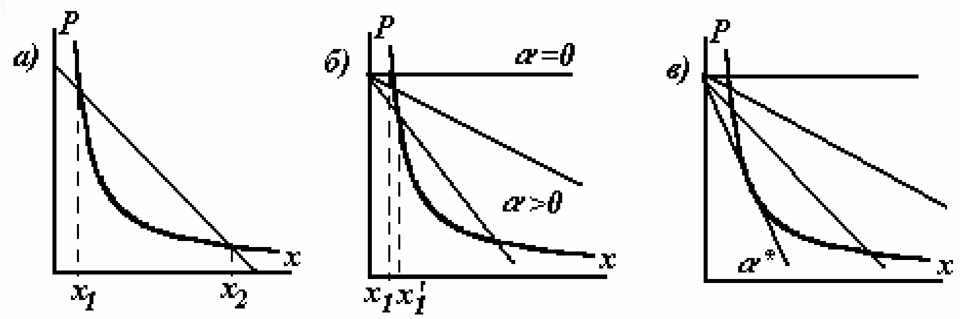
$$x_{1,2} = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - hx_0}. \qquad (3)$$

Подстановка численных значений приводит к результату $x_1 = 10м$, $x_2 = 90м$.

Второй корень $x_2 > l,$ где l — длина трубы. Однако отбросить его по этой причине нельзя: его можно интерпретировать таким образом, что поршень выскочит из трубы.

Тем не менее при медленном поднятии трубы поршень будет медленно смещаться от положения x_0 до положения $x_1 = 10м$, не достигая второго положения равновесия $x_2 = 90м$.

Для более убедительного анализа построим графики зависимостей давления воздуха в трубе $\left(p_1 = \dfrac{h_0 x_0}{x}\right)$ и гидростатического давления воды $\left(p_2 = h - x\right)$ в зависимости от x при вертикальном положении трубы (здесь p_1 и p_2 измеряются в метрах водяного столба (рис.а)).



Положениям равновесия соответствует условие $p_1 = p_2$. Легко показать, что точка x_1 — есть точка устойчивого, а x_2- неустойчивого равновесия. Следовательно, при смещении положения равновесия x_1 при подъеме трубы поршень будет все время стремится за этим положением равновесия. Действительно, пусть труба образует угол α с горизонтом, в этом случае гидростатическое давление $p_2 = h - x\sin\alpha.$ Изобразим эти зависимости при разных α (рис.б). Видно, что положение устойчивого равновесия медленно и монотонно смещается от x_1 до x_1', поэтому поршень никак не сможет приблизиться ко второму положению равновесия x_2.

Интересно отметить, что при $x_0 > \dfrac{h}{4}$ уравнение (2) не имеет ни одного действительного корня – это значит, что в этом случае воздух обязательно вытолкнет поршень! Запишем условие равновесия поршня при произвольном угле наклона трубы α

$$\frac{hx_0}{x} = h - x\sin\alpha . \qquad (4)$$

Отсюда находим

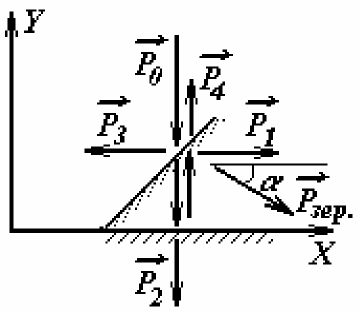
$$x_1 = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4hx_0\sin\alpha}}{2\sin\alpha},$$

$$x_2 = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4hx_0\sin\alpha}}{2\sin\alpha}$$

При α стремящимся к нулю, корень x_1 стремится к x_0, а x_2 «убегает» на бесконечность. При возрастании α устойчивый корень x_1 возрастает, а неустойчивый x_2 уменьшается. При некотором α^* (таком, что $h^2 - 4hx_0\sin\alpha^* = 0$) оба корня «сливаются» – поршень становится неустойчивым и вылетает из трубы (рис.в).

10-4. Импульс светового потока пропорционален числу фотонов (или интенсивности). Если коэффициент отражения равен ρ, то модуль импульса отраженного потока равен ρP_0, а модуль импульса прошедшего потока $(1-\rho)P_0$ (где P_0 – импульс падающего потока). Запишем модули импульсов всех потоков уходящих от зеркал

$$P_1 = \rho P_0$$
$$P_2 = (1-\rho)^2 P_0$$
$$P_3 = (1-\rho)\rho^2 P_0$$
$$P_4 = (1-\rho)^2 \rho P_0$$



Вычислим изменения проекций импульса света на выбранные оси

$$\begin{aligned} \Delta P_y &= P_4 - P_2 - (-P_0) = \left(1 - (1-\rho)^3\right)P_0 \\ \Delta P_x &= P_3 - P_1 = -\rho\left(1 - \rho(1-\rho)\right)P_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Импульс, который получила система зеркал равен по модулю изменению импульса света и противоположен ему по направлению, поэтому

$$P_{x\,зер.} = -\Delta P_x;\;\; P_{y\,зер.} = -\Delta P_y .$$