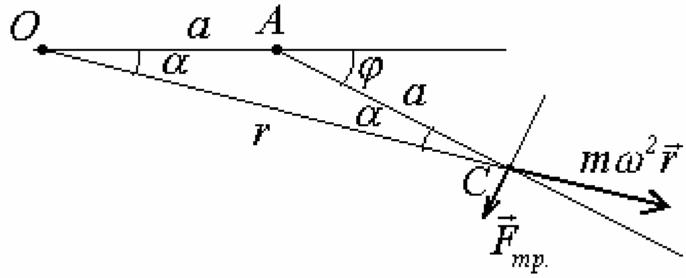
10.3 Задачу удобно решать во вращающейся неинерциальной системе отсчета, связанной с центром диска. В этой системе необходимо учитывать центробежную силу инерции $m\omega^2 r$, направленную радиально от оси вращения. (Заметим, что, в принципе, можно решать и в инерциальной системе отсчета.)



При раскручивании диска действие центробежной силы приведет к тому, что нити, удерживающие шарики, будут все время натянуты. Следовательно, они будут двигаться по дугам окружностей вокруг точки A, а силы трения будут направлены перпендикулярно нитям.

Пусть угловая скорость вращения диска равна ω. Определим области положения равновесия шариков. В проекции на направление перпендикулярное нити условие равновесия можно записать в виде (см. рисунок, сила натяжения нити за ненадобностью не показана)

$$F_{тр.} = m\omega^2 r \sin\alpha . \qquad (1)$$

Учитывая, что треугольник OAC равнобедренный, расстояние до центра можно выразить в простом виде $r = 2a\cos\alpha$, тогда уравнение (1) преобразуется к виду

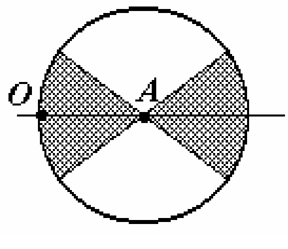
$$F_{тр.} = m\omega^2 r \sin\alpha = m\omega^2 \cdot 2a\cos\alpha\sin\alpha = ma\omega^2 \sin\varphi . \qquad (2)$$

Сила трения покоя удовлетворяет условию $F_{тр.} \le \mu mg$. Поэтому условие равновесия щарика при заданной угловой скорости вращения имеет вид

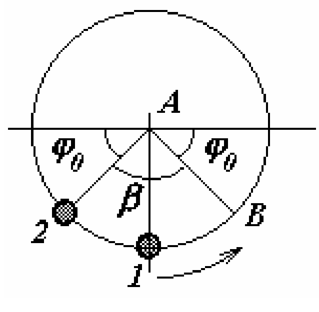
$$ma\omega^2 \sin\varphi \le \mu mg , \qquad (3)$$

или

$$\sin\varphi \le \frac{\mu g}{a\omega^2} . \qquad (4)$$

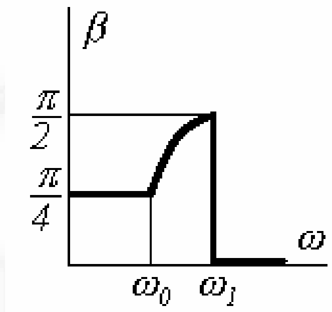


При $\omega \le \omega_0 = \sqrt{\dfrac{\mu g}{a}} \approx 4{,}4c^{-1}$ в любом положении на рассматриваемой окружности шарик будет находится в равновесии. При дальнейшем увеличении угловой скорости область равновесия будет сужаться (на рис. заштрихована). Таким образом, когда угловая скорость достигнет величины ω_0 первый шарик сдвинется с места и с увеличением скорости вращения будет смещаться вслед за границей области устойчивости. Когда угловая скорость

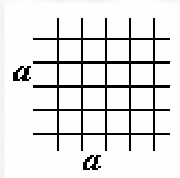


достигнет величины $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{\mu g}{a \sin \varphi_0}} \approx 6{,}3 c^{-1}$, начнет движение второй шарик, а первый в это время будет находится в точке B. Сразу после начала движения второй шарик попадает в область отсутствия равновесия и, следовательно, также устремится к точке B, где догонит первый шарик. Дальше они будут двигаться вместе. Таким образом, угол между нитями подчиняется следующим закономерностям

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, \quad npu \quad 0 \le \omega \le \omega_0; \\ \dfrac{3\pi}{4} - \arcsin \dfrac{\mu g}{a\omega^2}, \quad npu \quad \omega_0 \le \omega \le \omega_1; \\ 0, \quad npu \quad \omega > \omega_1 \end{cases}$$



10.4 В рамках указанной модели представим пленку как квадратную сетку, состоящую из маленьких пружинок длиной a. Пусть кусок пленки имеет форму квадрата со стороной $l_0 \quad (l_0 >> a)$. Тогда этот кусок имеет $N = 2\dfrac{l_0^2}{a^2}$ пружинок (площадь одной ячейки равна a^2, а на каждую ячейку приходится 2 пружинки - каждая пружинка «принадлежит двум соседним ячейкам!). Если растянуть пленку до квадрата со стороной l, то длина каждой пружинки увеличится на величину $\Delta x = \dfrac{l}{l_0}a - a = \dfrac{a}{l_0}(l - l_0)$. Поэтому увеличение потенциальной энергии пленки будет определяться формулой



$$U = N\frac{k(\Delta x)^2}{2} = k(l - l_0)^2 = k(\sqrt{S} - \sqrt{S_0})^2, \qquad (1)$$

где $S = l^2$ - площадь растянутой пленки, $S_0 = l_0^2$ - площадь недеформированной пленки.