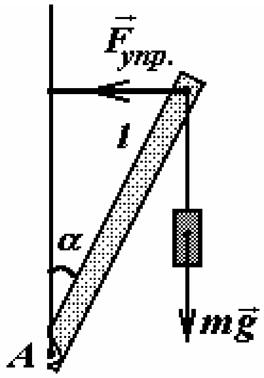
Задача 2.



Рассмотрим зависимость моментов сил, действующих на стержень, от угла его отклонения от вертикали α. (Понятно, что из-за симметрии задачи достаточно рассмотреть один стержень). Для опрокидывания стержня необходимо, чтобы момент силы тяжести

$$M_1 = mgl\sin\alpha \qquad (1)$$

превышал момент силы упругости

$$M_2 = k(2l\sin\alpha - 2a)l\cos\alpha \qquad (2)$$

при любом положении стержня. Таким образом, неравенство

$$mgl\sin\alpha > k(2l\sin\alpha - 2a)l\cos\alpha \qquad (3)$$

должно выполняться при любом значении угла α в диапазоне от 0 до $\pi/2$. Так как в этом диапазоне $\sin\alpha > 0$, то неравенство (3) можно перепмсать в виде

$$m > \frac{2kl}{g}\cdot\frac{(\sin\alpha - \xi)\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (4)$$

где обозначено $\xi = \dfrac{a}{l}$. Найдем максимум функции

$$f(\alpha) = \frac{(\sin\alpha - \xi)\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha - \xi ctg\alpha . \qquad (5)$$

Вычисляя производную

$$f'(\alpha) = -\sin\alpha + \frac{\xi}{\sin^2\alpha}$$

и приравнивая ее к нулю, получаем значение угла α^*, при котором функция (5) принимает максимальное значение

$$\sin\alpha^* = \sqrt[3]{\xi} . \qquad (6)$$

Найдем косинус этого угла

$$\cos\alpha^* = \sqrt{1 - \sin^2\alpha^*} = \sqrt{1 - \xi^{2/3}}$$

и подставим в неравенство (4)

$$m > \frac{2kl}{g}\cdot\frac{(\sin\alpha^* - \xi)\cos\alpha^*}{\sin\alpha^*} = \frac{2kl}{g}\left(1 - \frac{\xi}{\sin\alpha^*}\right)\cos\alpha^* =$$

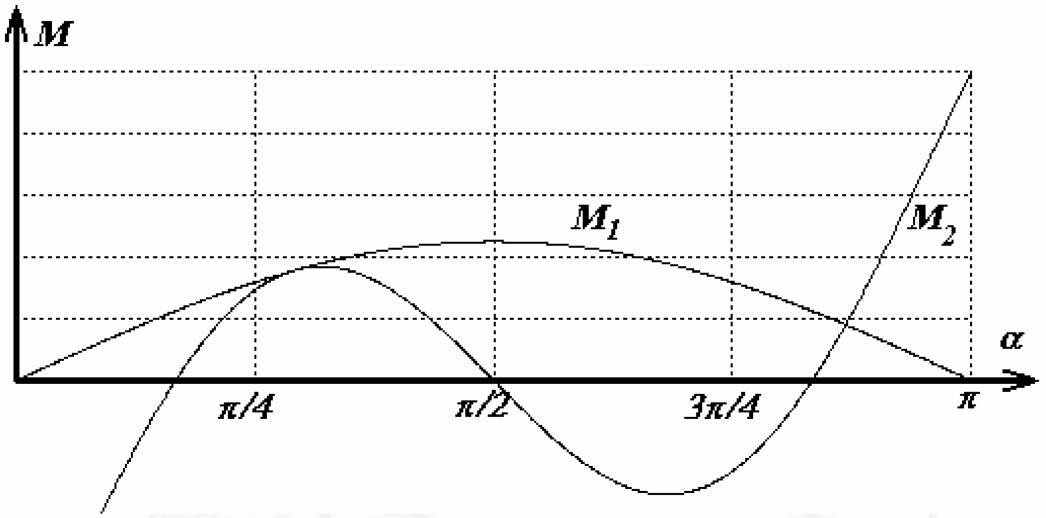
$$= \frac{2kl}{g}\left(1 - \xi^{2/3}\right)^{3/2}$$

Итак, окончательный ответ задачи имеет вид: стержни опрокинутся при

$$m > \frac{2kl}{g}\left(1 - \left(\frac{a}{l}\right)^{2/3}\right)^{3/2} .$$

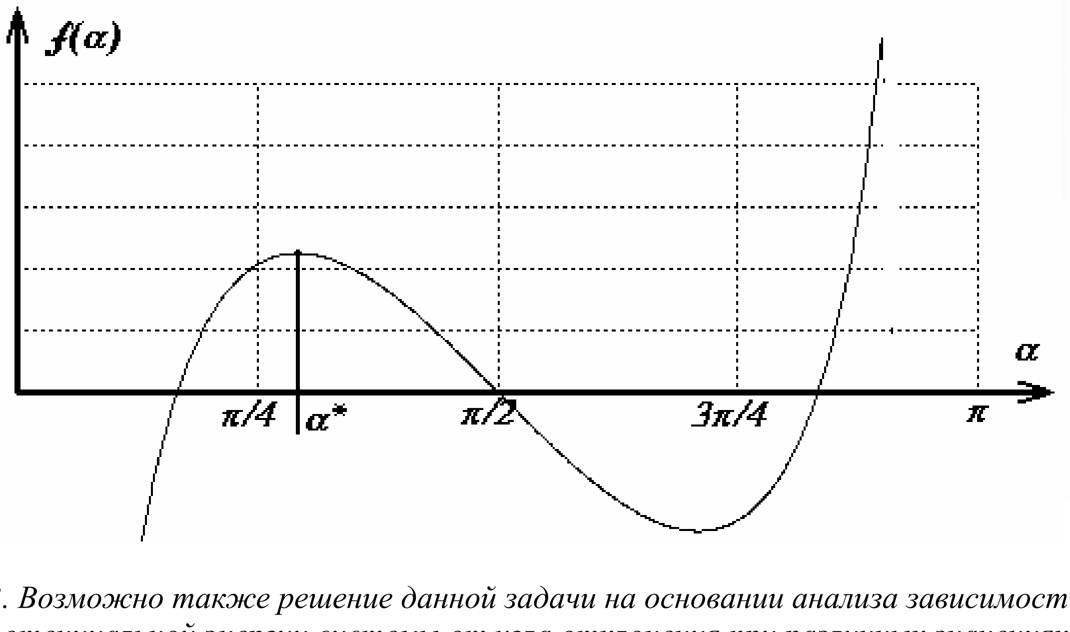
Комментарии к задаче.

1. Представим графически зависимости моментов сил (1),(2) от угла α. На



рисунке показан предельный случай, соответствующий найденному решению задачи. График построен при $\xi = 0,5$. Отрицательные значения момента силы упругости в области малых углов соответствуют сжатию резинки.

2. Покажем также график исследованной функции $f(\alpha)$, показывающий, что найденное значение α^* действительно соответствует точке максимума.

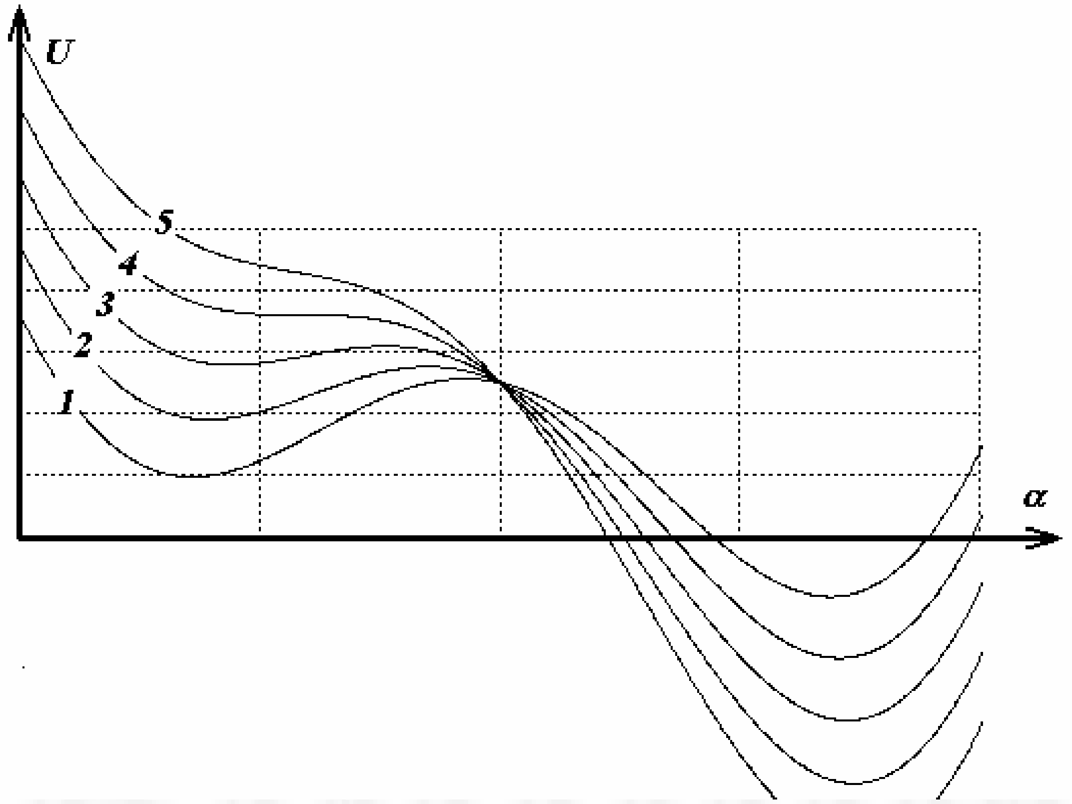


3. Возможно также решение данной задачи на основании анализа зависимости потенциальной энергии системы от угла отклонения при различных значениях масс грузов

$$U = 2mgl\cos\alpha + \frac{k}{2}\left(2l\sin\alpha - 2a\right)^2 =$$

$$= 2kl^2\left(\frac{mg}{kl}\cos\alpha - \left(\sin\alpha - \xi\right)^2\right)$$

Если потенциальная кривая имеет минимум в диапазоне $\left[0,\pi/2\right]$, то стержни могут оставаться в положении равновесия выше горизонтали, при исчезновении этого минимума система такого положения равновесия не



имеет.
Рисунок показывает изменение зависимости потенциальной энергии от угла α при возрастании увеличении массы грузов (в порядке возрастания номеров кривых), который и демонстрирует этот эффект - так на кривой 4, соответствующей найденному граничному значению массы), минимум отсутствует.

<u>Схема оценивания.</u>

Пункт	Содержание	Баллы	*Примечания*
2.1	Выражения для моментов сил	**4**	
	- необходимость сравнения моментов		1
	- момент силы тяжести		1
	- момент силы упругости		2
2.2	Исследование зависимостей моментов от угла отклонения	**5**	
	- необходимость анализа		1
	- поиск максимума		1
	- найден максимум		2
2.3	Оформление	**1**	
	ИТОГО	**10**	