Задача 9.1.

1.1 Запишем закон движения снаряда в системе отсчета, ось X которой горизонтальна, а ось Y вертикальна, начало отсчета совпадает с точкой вылета

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}. \qquad (1)$$

Вычислим прежде всего время полета снаряда T. Полагая $y = 0$, из второго уравнения системы находим

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2\cdot 6{,}2\cdot 10^2 \cdot \sin 45°}{9{,}8} \approx 89{,}5c \qquad (2)$$

Итак, во время разрыва снаряд будет находится в воздухе. Поэтому расстояние до него и время распространения звука Δt можно вычислить с помощью закона движения (1)

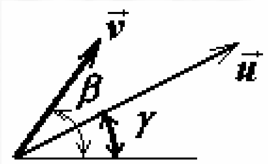
$$\Delta t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v_{зв}} = \frac{\sqrt{\left(v_0 t_0 \cos\alpha\right)^2 + \left(v_0 t_0 \sin\alpha - \dfrac{gt_0^2}{2}\right)^2}}{v_{зв}} \approx 48c. \qquad (3)$$

Можно подсчитать высоту и расстояние, на которой произошел разрыв

$$y_0 = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{gt_0^2}{2} \approx 8{,}74\cdot 10^3\ м; \quad x_0 = v_0 t_0 \cos\alpha \approx 13{,}2\cdot 10^3\ м$$

и далее использовать эти значения.

1.2 Скорость каждого осколка можно представить как сумму скорости снаряда $\vec{v}$ в момент разрыва и скорости осколка относительно снаряда $\vec{u}$. Направления этих скоростей удобно определять по углам отклонения от горизонта.



Запишем координаты (в той же системе) осколка через время τ после разрыва

$$\begin{cases} x = x_0 + \left(v_x + u\cos\gamma\right)\tau \\ y = y_0 + \left(v_y + u\sin\gamma\right)\tau - \dfrac{g\tau^2}{2} \end{cases},$$

подставив значения координат и компонент скорости снаряда в момент разрыва, получим закон движения

$$\begin{cases} x = v_0 t_0 \cos\alpha + \left(v_0\cos\alpha + u\cos\gamma\right)\tau \\ y = v_0 t_0 \sin\alpha - \dfrac{gt_0^2}{2} + \left(v_0 \sin\alpha - gt_0 + u\sin\gamma\right)\tau - \dfrac{g\tau^2}{2} \end{cases},$$

который можно привести к виду

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\left(t_0 + \tau\right) + u\tau\cos\gamma \\ y = v_0 \sin\alpha\left(t_0 + \tau\right) - \dfrac{g\left(t_0 + \tau\right)^2}{2} + u\tau\sin\gamma \end{cases} \qquad (4)$$

Эти уравнения допускают простую интерпретацию: движение осколков можно представить как сумму (суперпозицию) движения их центра по той же параболе, по которой бы двигался неразорвавшийся снаряд, и равномерного и прямолинейного движения относительно этого центра.

Таким образом, облако осколков в любой момент времени будет представлять собой шар, центр которого находится на параболе, описываемой системой (1), а радиус определяться скоростью самых быстрых осколков $R = u\tau$.

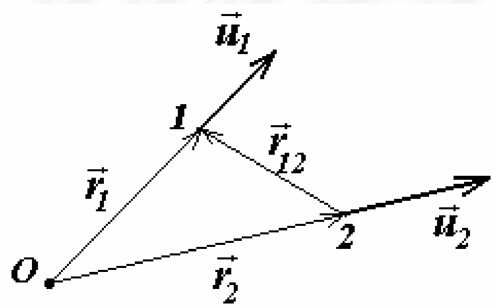
Через время τ_1 после разрыва координаты центра «облака» будут равны

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\left(t_0 + \tau_1\right) \approx 22\ км \\ y = v_0 \sin\alpha\left(t_0 + \tau_1\right) - \dfrac{g\left(t_0 + \tau_1\right)^2}{2} \approx 9{,}8\ км \end{cases}. \qquad (5)$$

Радиус облака $R = u\tau \approx 24\ км$. Таким образом, это облако частично будет «поглощено» поверхностью земли.

1.3 Время $\left(t_0 + \tau_2\right) = 90\ c$ примерно соответствует времени движения неразорвавшегося снаряда, поэтому в этот момент центр облака коснется поверхности земли. Следовательно, в полете будет находится примерно половина осколков, их масса $m_1 \approx \dfrac{m}{2} = 300 кг$.

1.4 Для определения относительных скоростей осколков удобно перейти в систему отсчета, связанную с центром облака ***O***. (Эта система отсчета, конечно, неинерциальная, но так нас интересуют только кинематические проблемы, то неинерциальность системы никакой роли не играет). В этой системе отсчета скорости осколков постоянны и направлены радиально. Если за время τ осколок пролетел расстояние r, то его скорость равна $u = \dfrac{r}{\tau}$. Учитывая направление скорости, это соотношение можно записать в векторной форме $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{\tau}$. Тогда относительная скорость одного осколка (первого) относительно второго равна разности их скоростей



$$\vec{u}_{отн} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \frac{1}{\tau}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \frac{\vec{r}_{12}}{\tau}, \qquad (6)$$

что и требовалось доказать. Как следует из данной формулы, требуемый коэффициент пропорциональности равен

$$a = \frac{1}{\tau}. \qquad (7)$$

1.5 Закон Хаббла совпадает с полученным законом разлета осколков (6), поэтому постоянная Хаббла есть величина обратно пропорциональная времени существования вселенной. Поэтому время жизни Вселенной можно оценить, как величину обратную этой постоянной $T \approx \frac{1}{H}$. Для численных расчетов постоянную Хаббла необходимо перевести в систему СИ. Вычислим длину светового года (достаточная точность - порядок величины)

$$1 св.год \approx 3{,}0 \cdot 10^{8} \frac{м}{с} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 с \approx 9{,}5 \cdot 10^{15} м \approx 10^{16} м$$

Тогда

$$H = (15 \div 30) \cdot 10^{-6} \frac{км}{с \cdot (св.год)} = (15 \div 30) \cdot 10^{-6} \frac{10^{3} м}{с \cdot 10^{16} м} \approx$$

$$\approx (15 \div 30) \cdot 10^{-19} с^{-1}$$

Оценка максимального времени жизни Вселенной имеет вид

$$T \approx \frac{1}{H} \approx \frac{1}{15 \cdot 10^{-19} с^{-1}} \approx 7 \cdot 10^{17} с \approx \frac{7 \cdot 10^{17}}{365 \cdot 24 \cdot 3600} лет \approx 2 \cdot 10^{10} лет$$

Вторая граница в два раза меньше. Таким образом, время жизни Вселенной оценивается в 10-20 миллиардов лет.

Схема оценивания.

Пункт	**Содержание**	**Баллы**	*Примечания*
1.1	**Расчет времени распространения звука** - закон движения снаряда - равномерность распространения звука - численный расчет	**5**	 2 1 2
1.2	**Форма «облака»** - закон движения осколков - разложение движения на составляющие - облако -шар - численный расчет координат центра и радиуса	**5**	 1 2 1 1
1.3	**Масса осколков в воздухе**	**1**	
1.4	**Относительная скорость** - использование системы отсчета - скорость пропорциональна расстоянию до центра - выражение для относительной скорости - правильное значение коэффициента пропорциональности	**4**	 1 2 1 1
1.5	**Время жизни Вселенной** - использование аналогии с разлетом осколков - время жизни обратно постоянной Хаббла - численный расчет	**5**	 1 2 2
	ИТОГО	**20**	
	За неверное число значащих цифр		-2