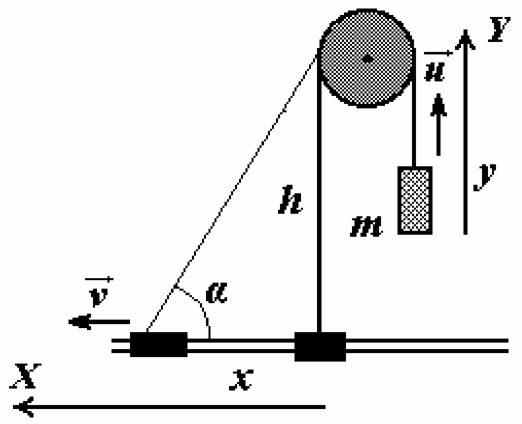
10 класс.



1. При смещении муфты на расстояние x висящий груз поднимется на высоту

$$y = \sqrt{x^2 + h^2} - h. \qquad (1)$$

Вычисляя производную по времени от этого выражения, установим связь между скоростями муфты v и груза u

$$u = v\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}. \qquad (2)$$

Заметим, что последнее соотношение $u = v\cos\alpha$ можно найти путем геометрических векторных построений.

а) Работа внешних сил при смещении муфты равна изменению потенциальной энергии груза, поэтому

$$A = mgy = mg\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h\right). \qquad (3)$$

б) Заметим, что когда муфта проходит положение равновесия (нить вертикальна), скорость груза обращается в нуль. Поэтому муфта будет иметь максимальную скорость именно при прохождении положения равновесия, так как в этом положении изменение потенциальной энергии максимально, и вся запасенная энергия (3) перейдет в кинетическую энергию муфты. Эту максимальную скорость найдем из закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = mg\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h\right),$$

или

$$v_{\max} = \sqrt{2g\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h\right)}. \qquad (4)$$

в) Для определения скорости муфты в произвольной точке опять воспользуемся законом сохранения механической энергии (кинетическая энергия муфты и груза равна изменению потенциальной энергии груза):

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mg\left(\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h\right) - \left(\sqrt{x^2 + h^2} - h\right)\right).$$

Используя соотношение (2), находим искомые скорости

муфты $$v = \sqrt{2g\frac{x^2 + h^2}{2x^2 + h^2}\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - \sqrt{x^2 + h^2}\right)}, \qquad (5)$$

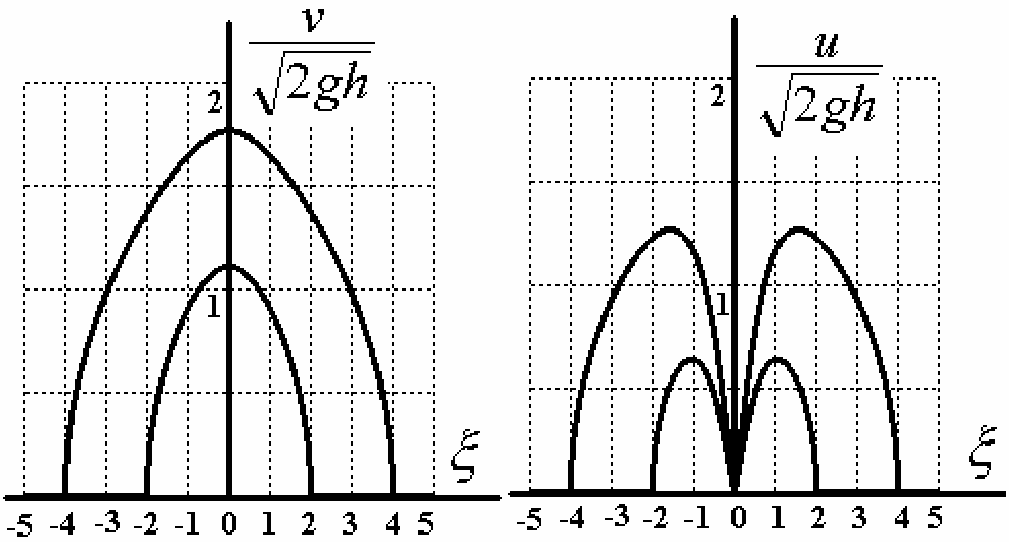
и груза $$u = \sqrt{2g\frac{x^2}{2x^2 + h^2}\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - \sqrt{x^2 + h^2}\right)}. \qquad (6)$$

Для построения графиков этих функций их удобно представить в виде

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{\xi^2+1}{2\xi^2+1}\left(\sqrt{\xi_0^2+1}-\sqrt{\xi^2+1}\right)};,$$

$$\frac{u}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{\xi^2}{2\xi^2+1}\left(\sqrt{\xi_0^2+1}-\sqrt{\xi^2+1}\right)};$$

где обозначено $\xi = \frac{x}{h}$. Графики модулей этих функций (при $\xi_0 = 2, \quad \xi_0 = 4$) представлены на рисунке.



г) Обратим внимание, что численные значения параметров таковы, что $x_0 >> h$. Поэтому практически все время движения (за исключением малого участка вблизи положения равновесия) нить, удерживающая муфту, горизонтальна. В этом случае можно приближенно считать, что муфта движется с постоянным ускорением $a = \frac{g}{2}$ (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, время ее движения от крайнего положения до положения равновесия определяется формулой $\tau = \sqrt{\frac{2x_0}{a}} = 2\sqrt{\frac{x_0}{g}}$, а период движения, очевидно в четыре раза больше $T = 8\sqrt{\frac{x_0}{g}} \approx 2{,}5c$.

2. При неподвижной наклонной плоскости скольжение бруска начинается когда проекция силы тяжести на наклонную плоскость превышает максимальную силу трения покоя, как известно это