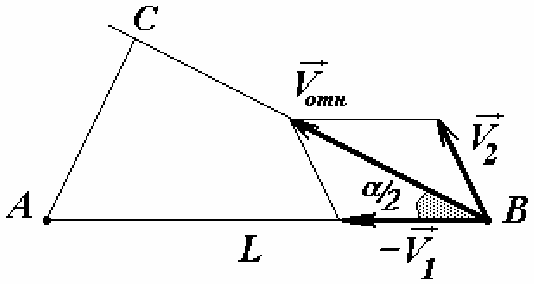
9 класс.

1. Перейдем в систему отсчета, связанную с кораблем ***A***. В этой системе корабль ***B*** движется с относительной скоростью $\vec{V}_{отн} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Модуль этой скорости равен

$$\left|\vec{V}_{отн}\right| = 2v\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad (1)$$



а ее вектор направлен под углом $\frac{\alpha}{2} = 30°$ к отрезку ***AB*** (см рис). Следовательно, корабль ***B*** движется относительно корабля ***A*** по прямой ВС.

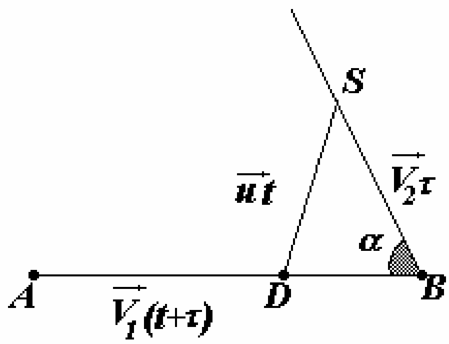
а) Минимальной расстояние между кораблями есть расстояние от точки А до прямой ВС, которое равно

$$l_{\min} = L\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2}. \qquad (2)$$

б) Очевидно, что шлюпка, спущенная с корабля ***B***, достигнет корабля *A* за минимальное время, если скорость их сближения максимальна, а начальное расстояние между ними минимально. Эти условия будут выполнены, если шлюпку сразу спустить на воду и направить ее навстречу кораблю ***A***. Тогда время, за которое шлюпка достигнет корабля ***A*** вычисляется по формуле

$$t_{\min} = \frac{L}{2v}. \qquad (3)$$

в) Пусть капитан корабля ***B*** отправляет шлюпку через время τ (нам необходимо найти его максимально возможное значение) в точке S, а затем через время t шлюпка встречается с кораблем ***A*** в точке ***D*** (см. рис.). За это время корабль ***A*** пройдет путь $\left|AD\right| = v(t+\tau)$. Как следует из рис. ,



чтобы шлюпка и корабль ***A*** встретились должно выполняться условие (которое следует из теоремы косинусов для треугольника ***BSD***)

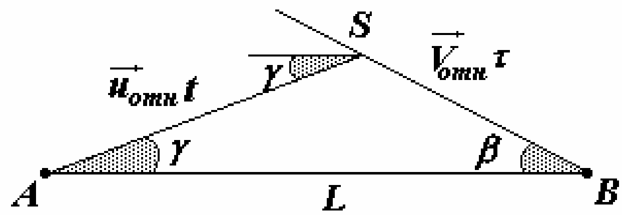
$$(ut)^2 = (v\tau)^2 + \left(L - v(t+\tau)\right)^2 - 2(v\tau)\left(L - v(t+\tau)\right)\cos\alpha. \qquad (4)$$

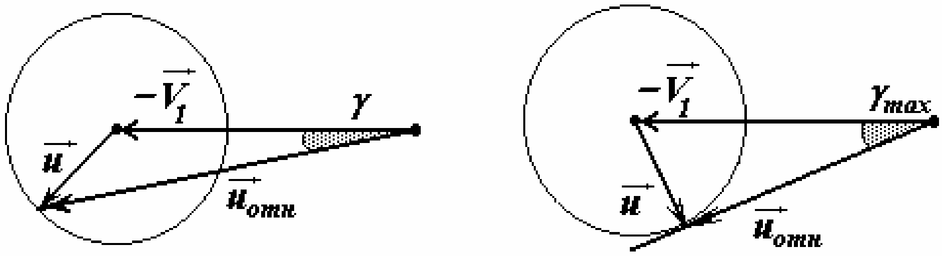
Для того, чтобы найти максимальное значение времени τ необходимо рассмотреть выражение (4) как уравнение относительно величины t и определить условия (значения τ), при которых оно имеет неотрицательное решение. В принципе этот путь решения задачи приведет к успеху, правда путем долгих и громоздких алгебраических преобразований.

Кстати, это же уравнение (при $u = v$) можно использовать для алгебраического обоснования результата, полученного в п. б). Решив это уравнение относительно t, можно получить зависимость времени движения $(t + \tau)$ от времени τ, а затем найти минимум этой функции. Этот способ приводит к уже полученному результату: функция $(t + \tau)$ монотонно возрастает с ростом τ, следовательно ее минимум достигается при $\tau = 0$.

Вернемся к решению пункта в).

Опять рассмотрим движение кораблей в системе отсчета, связанной с кораблем ***A***. В этой системе диаграмма перемещений кораблей и шлюпки имеет вид, показанный на рис. , здесь обозначено $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$, $\vec{u}_{отн} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ - скорость шлюпки, относительно корабля ***A***. На рисунке видно, что время τ (или что то же самое перемещение $V\tau$) будет максимально при максимальном угле γ, между направлением относительной скорости $\vec{u}_{отн}$ и отрезком ***AB***. Максимальное значение этого угла





можно найти, построив диаграмму скоростей (рис.) .
Вектор скорости шлюпки $\vec{u}$ может быть направлен под произвольным углом, иными словами его конец может располагаться в любой точке нарисованной окружности. Как следует из рисунка угол γ будет максимален, если вектор $\vec{u}_{отн}$ будет касательным к этой окружности. Таким образом, $\sin\gamma_{\max} = \dfrac{u}{v}$.

Запишем теорему синусов для треугольника ***ABS***

$$\frac{V\tau_{\max}}{\sin\gamma_{\max}} = \frac{L}{\sin(\pi - \beta - \gamma_{\max})}, \tag{5}$$

где $(\pi - \beta - \gamma_{\max})$ - угол $\boldsymbol{ASB}$. Из выражения (5) находим

$$\tau_{\max} = \frac{L}{V} \cdot \frac{\sin\gamma_{\max}}{\sin(\beta + \gamma_{\max})} = \frac{L}{2v\cos\beta} \cdot \frac{\sin\gamma_{\max}}{\sin\beta\cos\gamma_{\max} + \sin\gamma_{\max}\cos\beta} =$$

$$= \frac{L}{v} \cdot \frac{\sin\gamma_{\max}}{\sin 2\beta\sqrt{1 - \sin^2\gamma_{\max}} + \sin\gamma_{\max} 2\cos^2\beta} = \tag{6}$$

$$= \frac{L}{v} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 1} + 3}.$$

Отметим, что при

1) $u \to 0$ $\tau_{\max} \to 0$, т.е. шлюпку надо сразу спускать на воду и ждать пока к ней подплывет второй корабль;

2) при $u = v$, капитан может подождать в течении времени $\tau_{\max} = \frac{2L}{3V}$;

3) при $u > v$ шлюпка может догнать корабль после любого времени ожидания τ.

г) Скорость снаряда будет минимальна, если он пролетит минимальное расстояние, будучи выпущен под углом 45° к горизонту. Следовательно эту скорость можно найти из уравнения $\frac{v_{\min}^2}{g} = l_{\min}$, или

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{Lg}{2}}.$$